115 

## 3.2.3 Konvergenz

**Erinnerung**

**Ziel:** Konvergenz der Euler-Verfahren:

$$\max_{k=0,\dots,n} |x(t_k) - x_k| \le C \tau^p \quad \forall \tau < \tau_0 \quad (3.51)$$

Der Term $|x(t_k) - x_k|$ heißt lokaler Diskretisierungsfehler an der Stelle $t_k$.

Er setzt sich zusammen aus

- Fehler, den wir im k-ten Schritt zusätzlich machen
- Fehler, die aus allen Fehlern in vorigen Schritten resultiert.

(116) **Def 3.11** Es sei $x$ die exakte Lösung des AWPs (3.28). Dann heißt

$$(3.52) \qquad \varepsilon(t_k, \tau) = \underbrace{x(t_{k+1})} - \underbrace{\left[x(t_k) + \tau\left(\lambda x(t_k) + f(t_k)\right)\right]}$$

Konsistenzfehler des ex. Euler-Verfahrens.

Das ex. Euler-Verfahren heißt konsistent mit Ordnung $p$, falls mit $C \in \mathbb{R}$ (unabh. von $\tau$) gilt

$$\max_{k=0,\dots,n-1} |\varepsilon(t_k, \tau)| \leq C\, \tau^{p+1} \quad \forall \tau < \tau_0.$$

für ein $\tau_0 > 0$.

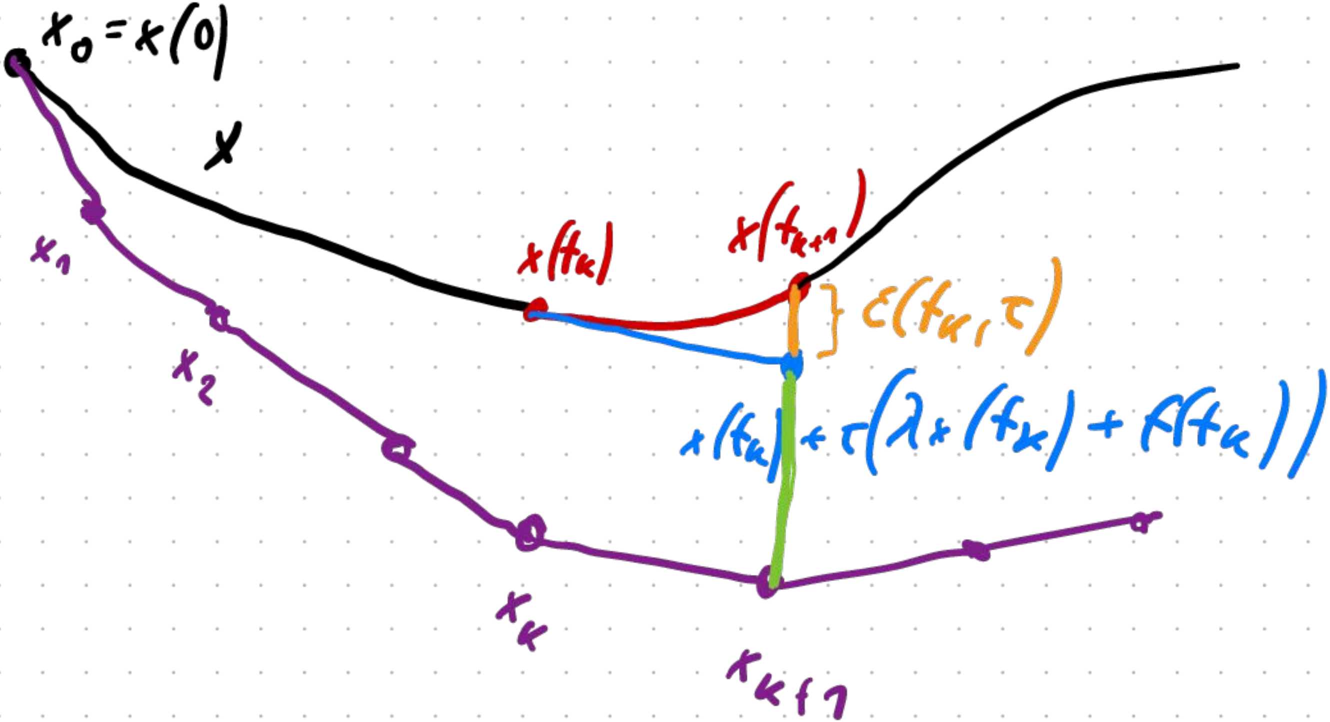
---

= exakte Lösung an Stelle $t_{k+1}$

= Ein ex. Euler-Schritt um $x(t_{k+1})$ zu approx. mit exaktem Startwert $x(t_k)$

117

$$\varepsilon(t_k,\varepsilon) = x(t_{k+1}) - \left[x(t_k) + \tau\left(\lambda x(t_k) + f(t_k)\right)\right]$$



(1.18) **Satz 3.12** Sei $x \in C^2[0,T]$. Dann ist das ex. Euler-Verfahren konsistent mit Ordnung $p=1$.

**Beweis:** Taylor-Entwicklung vom Grad 1 um $x(t_k)$ lautet

$$x(t_k+\tau) = x(t_k) + x'(t_k)\tau + \frac{1}{2}x''(\xi)\tau^2$$

für ein $\xi \in (t_k, t_k+\tau)$

Also gilt

$$x(t_{k+1}) = \underbrace{x(t_k) + \tau\big(\overbrace{\lambda x(t_k) + f(t_k)}^{x'(t_k)}\big)}_{(*)} + \frac{1}{2}x''(\xi)\tau^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t_k,\tau) = x(t_{k+1}) - (*) = \frac{1}{2}x''(\xi)\tau^2$$

(119) Somit gilt auch

$$\max_{k=0,\dots,n-1} |\varepsilon(t_k,\tau)| \le \frac{1}{2} \max_{t\in[0,T]} |x''(t)| \, \tau^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \|x''\|_\infty}_{=C} \tau^2$$

$$= C \, \tau^2 .$$ $\boxtimes$

Satz 3.13 Es sei $x \in C^2[0,T]$. Dann ist das ex. Euler-Verf. konvergent mit Ordnung $p=1$ und es gilt die a priori Fehlerabschätzung

$$\max_{k=0,\dots,n} |x(t_k) - x_k| \le (1+T) e^{\lambda_+ T} \|x''\|_\infty \tau$$

wobei $\lambda_+ := \max\{0, \lambda\}$.

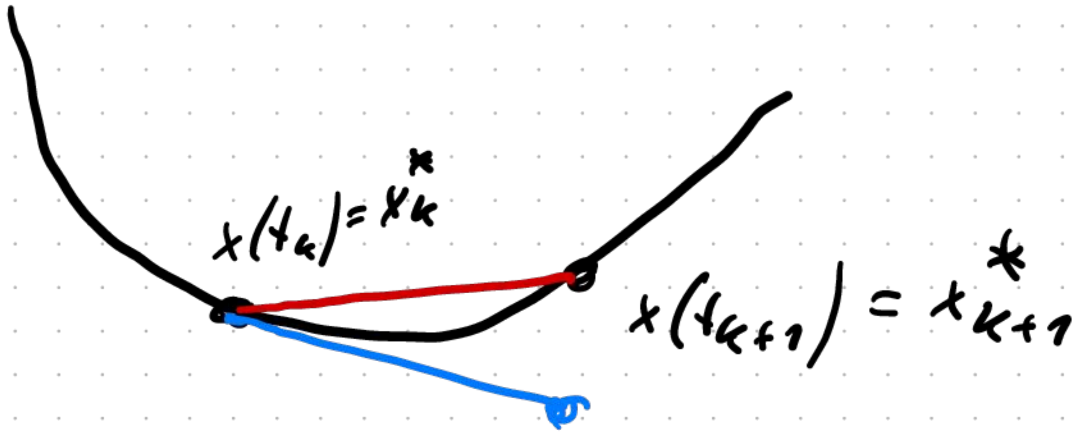
(1.20) <u>Beweis</u> Betrachte die Gitterfunktion $x_\Delta^*$ mit $x_k^* = x(t_k)$. Dann gilt

$$x_{k+1}^* = x(t_{k+1}) = x(t_k) + \tau(\lambda x(t_k) + f(t_k)) + \varepsilon(t_k,\tau)$$

$$= x_k^* + \tau(\lambda x_k^* + \underbrace{f(t_k) + \tau^{-1}\varepsilon(t_k,\tau)}_{\tilde{f}(t_k)})$$

$$= \underbrace{x_k^* + \tau(\lambda x_k^* + \tilde{f}(t_k))}_{\text{ex. Euler-Schritt mit gestörter rechter Seite } \tilde{f}}$$

121




- ein ex. Euler-Schritt mit rechter Seite $\tilde{f}$
- ein ex. Euler-Schritt mit — " — $f$

Wir erhalten $x_1^*$ durch Anwendung des ex. Euler-Verfahrens auf das Problem mit gestörter rechter Seite $\tilde{f}$.

Aus Satz 3.7 folgt:

$$\max_{k=0,\dots,n} |x(t_k) - x_k| = \max_{k=0,\dots,n} |x_k^* - x_k|$$

$$\leq (1+T)\underbrace{\left(e^{\lambda_+ T}\right)}_{=\begin{cases} 1 & : \lambda < 0 \\ e^{\lambda T} & : \lambda \geq 0 \end{cases}} \max_{k=0,\dots,n} |f(t_k) - \tilde{f}(t_k)|$$

$$= (1+T) e^{\lambda_+ T} \max_{k=0,\dots,n} |\tau^{-1} \varepsilon(t_k, \tau)|$$

12 ..., wenn für $\lambda < 0$ die Stab.bed. $\tau \leq \frac{2}{|\lambda|}$

gilt. Also gilt

Stabilität / diskrete Kondition

$$\max_{k=0,\dots,n} |x(t_k) - x_k| \leq (1+T) e^{\lambda_+ T} \tau^{-1} \max_{k=0,\dots,n} |\varepsilon(t_{k+1}, \tau)|$$

Konsistenz $\rightarrow$

$$\leq (1+T) e^{\lambda_+ T} \tau^{-1} \frac{1}{2} \|x''\|_\infty \tau^2$$

$$= \underbrace{(1+T) e^{\lambda_+ T} \frac{1}{2} \|x''\|_\infty}_{= \text{const}} \tau$$

$$\text{für} \begin{cases} \text{alle } \tau > 0 & : \lambda \geq 0 \\ \tau < \tau_0 = \frac{2}{|\lambda|} & : \lambda < 0 \end{cases}$$

$\boxed{}$

124 **Bem:** Auch im. Euler-Verfahren ist
konsistent mit Ordnung $p=1$.
Auch dafür gilt
(Stabilität + Konsistenz mit Ordnung $p$)
$\Rightarrow$ Konvergenz mit Ordnung $p$.

**Beispiel** Skript Seite 35/36

125 ## 3.3 Systeme linearer DGL mit konst. Koeffizienten

Systeme von $n$ gekoppelten DGlen:

**Beispiel** Gesucht $x_1 : [0,T] \to \mathbb{R}$

$x_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$

$$(*) \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_2(t) \end{cases}$$

Sei $x : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ mit $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann gilt $(*) \Leftrightarrow$

$$x'(t) = A\, x(t) \qquad (3.54)$$

(12.6) D.h. wir haben ein System von DGL in Matrix-Vektor-Schreibweise notiert.

Beobachtung: System ist linear, da Linearkomb. von Lösungen wieder Lösungen sind. Die Menge aller Lösungen ist ein linearer Raum $V$.

Wie sieht $V$ aus?

Idee: Bestimme Basis von $V$.

(127) Zunächst: Einfacher Fall: A ist diagonal,

d.h. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Dann reduziert sich (3.54) zum entkoppelten System

$$x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t)$$
$$x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t)$$

Alle Lösungen haben die Form

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}.$$

bzw.

$$x(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

128 D.h. $\psi_1 = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}\\0\end{pmatrix}$,

$$\psi_2 = e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

sind eine Basis von $V$ (Fundamentalsystem)

Jetzt: $A$ nicht diagonal

Allgemeiner Lösungsansatz $\quad x(t) = e^{\lambda t}\varphi$

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}\varphi = x'(t) = Ax(t) = e^{\lambda t}A\varphi$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\lambda\varphi = A\varphi.}$$

$$\boxed{x(t) = e^{\lambda t}\varphi \text{ ist Lösung von } (3.54) \Longleftrightarrow \lambda\varphi = A\varphi}$$

129 **Def 3.14** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$A\varphi = \lambda \varphi$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \neq 0$, so heißt $\varphi$ Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ von $A$.

**Beispiel** $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Dann sind $\lambda_1 = 2$, $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = -4, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paare von Eigenwerten mit zugehörigen Eigenvektoren. Dies sind alle EWe.

(190) Die DGL hat danach die Lösungen

$$x(t) = \alpha_1 e^{2t} v_1 + \alpha_2 e^{-4t} v_2$$

mit bel. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und

$$\varphi_1(t) = e^{2t} v_1 \quad , \varphi_2(t) = e^{-4t} v_2$$

sind ein Fundamentalsystem.

---

Ab jetzt sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Wir betrachten die DGL

$$x'(t) = A x(t) \tag{3.57}$$

für $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

(131) Wir beschränken uns auf symm. Matrizen $A$, d.h. $A^T = A$.

**Satz 3.15** Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symm., d.h. $A^T = A$. Dann besitzt $A$ orthonormale Eigenvektoren $e_1, \ldots, e_m$ zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

($\to$ Lin A) Insbesondere sind $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$.

Achtung: Fehler im Skript: Die $\lambda_i$ sind nicht immer paarweise verschieden!

Bsp. $J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. EWe $\lambda_1 = 1 \ldots = \lambda_m$, zu $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Zeile $i$

(132) Von nun an sei $A$ sym. und die EWe geordnet, d.h.

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \ldots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$$

Wir def. Matrizen $T, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$T = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Aus $A e_k = \lambda_k e_k$ folgt

$$AT = (A e_1, \ldots, A e_n)$$

$$= (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = TD$$

$$\Rightarrow \quad T^{-1} A T = D \text{ und } A = T D T^{-1}$$

(133) Fazer q'lt $T^T T = I \Rightarrow T^T = T^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T^T A T = T^{-1} A T = D \\ T D T^T = T D T^{-1} = A \end{cases}$$