

(39) Erinnerung: System $x'(t) = A x(t)$ (3.57)
mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Satz 3.15 A sym $\Rightarrow A$ diagonalisierbar, d.h.
 $A = T D T^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, T = (p_1, \dots, p_n)$$

p_i ist Eigenvektor } $A p_i = \lambda_i p_i$
zum Eigenwert λ_i

$\langle p_i, p_j \rangle = 0$ bzw. $p_i \perp p_j$ für $i \neq j$

$$\Rightarrow T^T = T^{-1} \Rightarrow A = T D T^{-1} = T D T^T$$

(135) Sei $|v|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2}$ für $v \in \mathbb{R}^m$

die Euklidische Norm.

Die zugehörige Matrixnorm ist

$$|M|_2 = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^m \\ v \neq 0}} \frac{|Mv|_2}{|v|_2} \quad \text{für } M \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Es gilt $|T|_2 = 1 = |T^T|_2 = |T^{-1}|_2$

$\Rightarrow \kappa(T) = |T|_2 |T^{-1}|_2 = 1.$

... weil $T^T = T^{-1}$ (d.h. T ist unitär)

(136) Lemma 3.16 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann ist x genau dann eine Lösung von (3.57), wenn $y = T^{-1}x$ eine Lösung von

$$y'(t) = D y(t) \quad (3.60)$$

ist. Dabei ist T die Matrix aus der Diagonalisierung.

Beweis

$$y'(t) = T^{-1} x'(t) \stackrel{(3.57)}{=} T^{-1} A x(t) \\ = T^{-1} \underbrace{T D T^{-1}}_A x(t) = D \underbrace{T^{-1} x(t)}_{y(t)} = D y(t)$$

andereherum

$$x'(t) = T y'(t) \stackrel{(3.60)}{=} T D y(t) = \underbrace{T D T^{-1}}_A x(t) = A x(t) \quad \square$$

(137) Satz 3.47 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym. Dann haben
alle Lösungen x von (3.57) die Gestalt

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{\lambda_k t} p_k \quad (3.61)$$

für $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$

Beweis (Skizze)

$$x \text{ löst (3.57)} \Leftrightarrow y = T^{-1} x \text{ löst (3.60)}$$

$$\Leftrightarrow y = T^{-1} x : y' = 0 y$$

$$\Leftrightarrow y = T^{-1} x : y_k'(t) = \lambda_k y_k(t) \quad k=1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow x = T y : y_k(t) = \alpha_k e^{\lambda_k t} \quad \text{--- " ---}$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{\lambda_k t} p_k \quad \Leftrightarrow (3.61) \quad \square$$

(138) Konsequenz Der Lösungsraum V von (3.57) ist n -dimensional (wegen A.syan.).

Die Funktionen

$$\psi_k = e^{\lambda_k t} p_k$$

sind ein Fundamentalsystem,

d.h. eine Basis von V .

Jetzt: Anfangswertproblem (AWP)

$$x'(t) = Ax(t)$$

$$x(0) = x_0$$

für gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$0 < t \leq T \quad \} (3.52)$$

(939) Satz 23.18 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sym. Dann hat das
(AUP) (3.52) die eindeutig bestimmte Lösung

$$x(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{\lambda_k t} p_k \quad (3.63)$$

mit dem Koeffizientenvektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T \in \mathbb{R}^m$

$$\alpha = T^{-1} x_0$$

bzw. $\alpha \in \mathbb{R}^m$ ist

$$T \alpha = x_0$$

(3.64).

Beweis Einsetzen des Startwerts $\rightarrow$ Skript. $\square$

(140) Bem.: Wenn wir die Matrixexponentielle durch
$$e^A := T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) T^{-1}$$
definieren, dann gilt

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

Bem. Die Lösung des inhomogenen AWP:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + f(t) \quad 0 \leq t \leq T \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

ist gegeben durch

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau) d\tau \quad (3.56)$$

(141)

Jetzt: Kondition des AWP's

Um den Fehler in x zu quantifizieren
müssen wir eine Norm $([0, T], \mathbb{R}^n)$
einführen:

$$\|v\|_{\infty} = \max_{t \in [0, T]} |v(t)|_2 \quad v \in ([0, T], \mathbb{R}^n)$$

(142) Satz 3.19 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sym. Seien $x, \tilde{x}$ die
Lösungen des AWP (3.62) zu Anfangswerten
 $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\|x - \tilde{x}\|_{\infty} \leq \max_{t \in [0, T]} e^{\lambda_1 t} |x_0 - \tilde{x}_0|_2 \quad (3.67)$$

Die Abschätzung ist scharf.

Beweis (Übung)

$$\Rightarrow K(\text{AWP}) = \max_{t \in [0, T]} e^{\lambda_1 t}$$

abs. Kondition des AWP (3.52)

(143) Specialfälle

a) Alle EW λ_k sind negativ, d.h. gilt $\lambda_1 < 0$

also

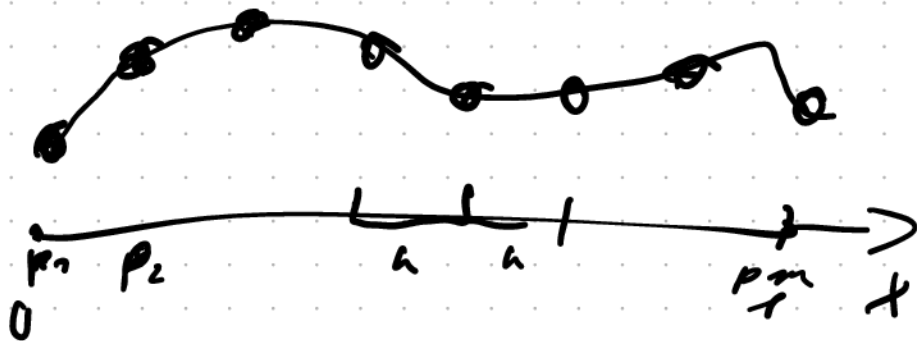
$$\kappa(AWPS) = \max_{t \in [0, T]} e^{\lambda_1 t} = 1$$

b) Wenn $\lambda_1 \geq 0$, d.h. gilt

$$\kappa(AWPS) = \max_{t \in [0, T]} e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 T}$$

(149) Beispiel: Wärmeleitungsgleichung
 $u: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $u(t, x)$ = Temperatur zum Zeitpunkt t
am Ort $x \in [0, 1]$
 $\frac{du}{dt} = u''$ (partielle Dift. gl.)

Diskretisierung in Ort: festes Ortsgitter
 $p_1, \dots, p_m$



(145)

$$\mu''(p) \approx \frac{\mu(p-h) - 2\mu(p) + \mu(p+h)}{h^2}$$

$$\mu(p_i) \approx x_i$$

$$\mu''(p_i) \approx \frac{1}{h^2} (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$$

$$\leadsto x'(t) = A x(t)$$

mit

$$A = (m+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & & & \\ & & & \\ 0 & & & 1 \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

(146) Hier gilt

$$\lambda_k = \underbrace{-4(m+1)^2 \sin^2\left(\frac{k}{2(m+1)}\pi\right)}_{< 0} \quad k=1, \dots, m$$

$$-4(m+1)^2 \approx \lambda_m < \dots < \lambda_1 \approx -\pi^2$$

$$\kappa(AWPS) = \max_{t \in [0, T]} e^{\lambda_1 t} = 1.$$

147 3.3.2 Euler-Verfahren

$$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$$

$$\tau = t_{k+1} - t_k = \frac{T}{n}$$

ex. Euler-Verfahren →

$$x_{k+1} = x_k + \tau \lambda x_k \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$x_k \approx x(t_k)$$

Existenz & Eindeutigkeit ✓

(14f) Diskrete Kondition und Stabilität

Fehlermaß für Gitterfunktionen

$$v_\Delta : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\|v_\Delta\|_\infty = \max_{k=0, \dots, n} |v_k|_2$$

2149 Satz 3.20 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym. Sei $x, \tilde{x}$ die mit dem ex. Euler-Verfahren berechneten Näherungen zu Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ist für $\lambda_m < 0$ die Stabilitätsbedingung

$$\tau \leq \frac{2}{|\lambda_m|}$$

erfüllt, so gilt

$$\|x_\Delta - \tilde{x}_\Delta\|_\infty \leq \max_{t \in [0, T]} e^{\lambda_1 t} |x_0 - \tilde{x}_0|.$$

(150)

Wie im skalaren Fall gilt

$$\kappa(\text{expler}) \leq \kappa(\text{AKRS})$$

wenn die Stabilitätsbed. erfüllt ist

Beweis (Skript)

- Für das inhomogene System: ex. Eule

$$x_{k+1} = x_k + \tau(Ax_k + f(t_k))$$

kann man das Stab. resultat / Kondition
von skalarem Fall übertragen

- Konsistenz wie im skalaren Fall

(157)

Wie im skalaren Fall kann man
zeigen (Stabilität + Konsistenz) $\Rightarrow$ Konvergenz

$$\max_{k=0, \dots, n} |x(t_k) - x_k|_2 \leq C \tau$$

$$\theta \leq \frac{2}{12n}$$

Beispiel (Wärmeleitungsgleichung)

$$\lambda_m \approx -4(n+1)^2$$

$$\Rightarrow \tau \leq \frac{2}{4(n+1)^2}$$

sehr kleine τ für feines Gitter

152

Ausweg: impl. Euler

$$x_{k+1} = x_k + \tau A x_{k+1} \quad k=0, \dots, n-1$$

$$(I - \tau A) x_{k+1} = x_k$$

Wir müssen ein LGS lösen!

- Existenz & Eindeutigkeit: ja, falls $\lambda_1 < 0$
- Stabilität $\forall \tau > 0$ falls $\lambda_1 < 0 \quad \forall \tau > 0$
- Konsistenz wie skalare Fall

$\Rightarrow$ (Konsistenz + Stabilität) $\Rightarrow$ Konvergenz.

Skript