153

# 4 Nichtlineare Gleichungssysteme

## 4.1 Fixpunktiteration

Beispiel: Gesucht: Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}$ von

$$F(x) = x(x-1) = x^2 - x$$

d.h.

$$x^* \in \mathbb{R}: \quad F(x^*) = 0 \qquad (*)$$

(Lösungen: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$)

$(*)$ ist äquivalent zu

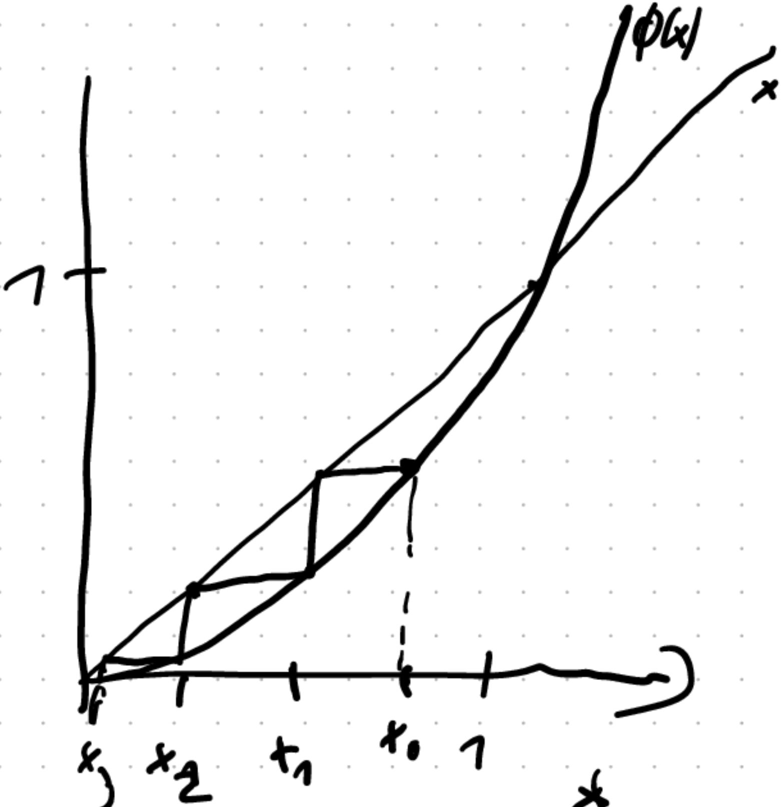
$$x^* \in \mathbb{R}: \qquad \phi(x^*) = x^* \qquad (4.1)$$

mit $\phi(x) = F(x) + x = x^2$

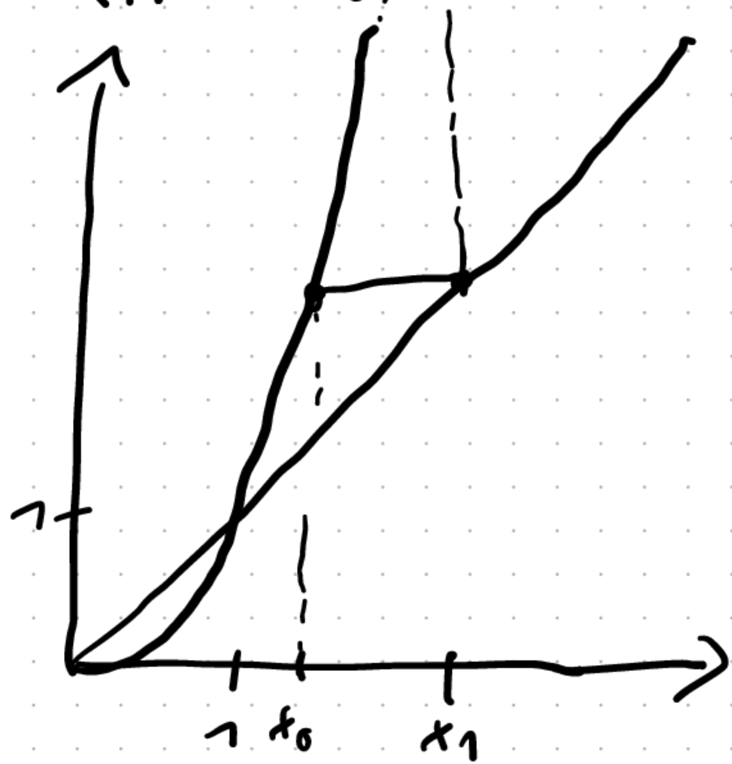
Jede Lösung $x^*$ von (4.1) heißt **Fixpunkt** (FP) von $\phi$.

154 **Fixpunktiteration**: Gegeben $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$




Konvergenz gegen $x_1^* = 0$




Divergenz!

155 **Beobachtung:** Konvergenz / Divergenz hängt von Startwert ab

**Satz 4.1** Sei $I = [a,b]$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$ mit:

(4.2) • $\phi$ ist Selbstabbildung, d.h. $\phi(x) \in I \quad \forall x \in I$

(4.3) • $\phi$ ist Kontraktion, d.h. es ex. $q \in [0,1)$ mit
$$|\phi(x) - \phi(y)| \le q\,|x-y| \quad \forall x,y \in I$$

Dann gilt

(156) a) Es ex. genau ein FP $x^*$ von $\phi$ in $I$.

b) Die Folge $x_{k+1} = \phi(x_k)$ konv. für jedes $x_0 \in I$ gegen $x^*$.

c) Fehlerreduktion:

$$|x^* - x_{k+1}| \leq q \; |x^* - x_k|$$

d) Apriori Fehlerabschätzung

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|$$

e) A posteriori Fehlerabschätzung

$$|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{q}{1-q} |x_{k+1} - x_k|$$

(57) <u>Beweis</u> • <u>Wohldefiniertheit der FP-Iteration:</u>

Wegen $x_0 \in I$ und (4.2) gilt $x_1 = \phi(x_0) \in I$.

Induktiv gilt $x_k \in I \Rightarrow x_{k+1} = \phi(x_k) \in I$

$\Rightarrow$ Für $x_0 \in I$ ist $(x_k)$ wohldef. und

es gilt $x_k \in I \ \forall k$.

• <u>$x_k$ ist eine Cauchy-Folge:</u>

Wegen (4.3) gilt

$$|x_{k+1} - x_k| = |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq q\,|x_k - x_{k-1}|$$
$$\leq \ldots \leq q^k\,|x_1 - x_0|$$

und

$$|x_{k+i+1} - x_{k+i}| \leq q^i\,|x_{k+1} - x_k|.$$

(158) Somit gilt

$$|x_{k+j}-x_k| \leq |x_{k+j}-x_{k+j-1}|+|x_{k+j-1}-\dots|+\dots+|x_{k+1}-x_k|$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} |x_{k+i+1}-x_{k+i}|$$

$$\leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} q^i\right)|x_{k+1}-x_k|$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right)}_{\text{geom. Reihe } = \frac{1}{1-q}} q^k |x_1-x_0| = \frac{q^k}{1-q}|x_1-x_0|.$$

Also gilt $\forall \varepsilon>0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}: \ |x_{k+j}-x_k| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, j \geq 0$

d.h. $x_k$ ist eine Cauchy-Folge.

Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ex. ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

(159) • $x^*$ ist FP und da $I$ abgeschl. gilt $x^* \in I$.

Wegen (4.3) ist $\phi$ Lipschitzstetig, insbes. stetig.

Also gilt $(x_k \to x^*) \Rightarrow \phi(x_k) \to \phi(x^*)$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(x_k) \to \phi(x^*) \\ \| \\ x_{k+1} \longrightarrow x^* \end{array}\right\} \Rightarrow \phi(x^*) = x^*.$$

D.h. $x^*$ ist FP.

b) ✓

• $x^*$ ist eindeutig

Seien $x^*, y^* \in I$ zwei FPe mit $x^* \neq y^*$, dann gilt

$$|x^* - y^*| = |\phi(x^*) - \phi(y^*)| \leq q|x^* - y^*| < |x^* - y^*| \quad ↯.$$

$q < 1$
$|x^* - y^*| > 0$

a)

(160) • <u>Fehlerreduktion</u> c)

$$|x^* - x_{k+1}| = |\phi(x^*) - \phi(x_k)| \leq q\,|x^* - x_k| \quad ✓$$

• <u>A posteriori</u> e)

$$|x^* - x_{k+1}| = |\phi(x^*) - \phi(x_k)|$$
$$\leq |\phi(x^*) - \phi(x_{k+1})| + |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)|$$
$$\leq q\,|x^* - x_{k+1}| + q\,|x_{k+1} - x_k|$$

$$\Rightarrow \quad |x^* - x_{k+1}| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_{k+1} - x_k| \quad ✓$$

• <u>A priori</u> d)

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{q}{1-q}\,q^{k-1}\,|x_1 - x_0| \quad ✓$$

(161) **Bemerkung** Sei $\phi \in C^1(I)$ und $q := \sup_{z \in I} |\phi'(z)|$.

Dann gilt

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\xi)| \cdot |x - y| \leq q\,|x - y|.$$

Für das Bsp ist $\phi$ in $[-r, r]$ mit $r < \frac{1}{2}$ eine Kontraktion und Selbstabbildung

(152) Satz 4.1 ist ein Spezialfall von

**Satz 4.2** (Banach'scher Fixpunktsatz)

Sei $B$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$, $U \subseteq B$ abgeschlossen und nicht leer.

Für $\phi : U \to B$ gilt

- Selbstabb. d.h. $\phi(x) \in U \quad \forall x \in U$.
- Kontraktion d.h. $\exists q \in [0,1)$:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq q \|x - y\| \quad \forall x,y \in U.$$

Dann gilt

(1.6.3) a) $\phi$ hat einen eindeutigen FP $x^* \in U$

b) $x_{k+1} = \phi(x_k)$ konvergiert für jedes $x_0 \in U$ gegen $x^*$

c) Fehlerreduktion:

$$\|x^* - x_{k+1}\| \leq q \|x^* - x_k\|$$

d) A priori ...

e) A posteriori ...

Beweis: Exakt wie bei Satz 4.1. $\square$

(164) Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum, d.h. ein Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$ in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

Def. 4.3 Sei $B$ ein normierter Raum, $U \subseteq B$

Eine Abb $\phi: U \to B$ heißt Lipschitz stetig, wenn $L \geq 0$ ex. mit

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

Def 4.4 Sei $B$ ein normierter Raum. Dann konvergiert eine Folge $(x_k) \in \mathbb{R}$ linear mit Konvergenzrate $q$ gegen $x^*$, falls gilt $\|x^* - x_{k+1}\| \leq q \|x^* - x_k\|_{k \geq 0}$.

165 **Anwendung** Gegeben LGS $Ax=b$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$
Gesucht $x\in\mathbb{R}^n$

Gauß'scher-Algorithmus (LR-Zerlegung) $O(n^3)$

Angenommen $A$ ist dünnbesetzt,
d.h. # Nichtnulleinträge $\in O(n)$.
Dann gilt immer noch

**Alternative:** Iterative Verfahren!

· Sei $\phi(x) = x + B^{-1}(b-Ax)$
für eine reguläre Matrix $B$.

166 Dann gilt $\quad \phi(x) = x$

$$\Leftrightarrow \quad B^{-1}(b - Ax) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Ax = b$$

<u>FP-Iteration:</u> $x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k + B^{-1}(b - Ax_k)$

Sei $U = \mathbb{R}^n$. Dann: $U$ abgeschlossen, $U \neq \emptyset$,

$\phi(x) \in \mathbb{R}^n = U \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

D.h. $\phi$ Selbstabbildung

(157)

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|x + B^{-1}(b - Ax) - y - B^{-1}(b - Ay)\|$$

$$= \|(I - B^{-1}A)(x - y)\|$$

$$\leq \|I - B^{-1}A\| \, \|x - y\|$$

D.h. wenn $q = \|I - B^{-1}A\| < 1$, dann konvergiert $x_k$ gegen die Lösung $x^*$ des LGS.

<u>Aufwand pro Iterationsschritt</u>:

- 1 Produkt: $Ax_k$ (A dünn $\Rightarrow O(n)$)
- 1 LGS mit Matrix B lösen

(158) Wünsche:

- $B^{-1}$ ist billig, z.B. $B$ diagonal, $B$ Dreiecksmatrix
- $q = \|I - B^{-1}A\|$ klein ($< 1$) d.h. $B^{-1} \approx A^{-1}$

<u>Beispiele</u>: Ang. $A = D + L + R$

$B = D \Rightarrow$ Jacobi-Verfahren

$B = D + L \Rightarrow$ Gauß-Seidel-Verfahren

...