① # Analysis 2

C. Gräser

Assistentin M.-W. Wolf

Tutor: F. Saavedra

Termine

Vorlesung: Di, Do 10:15 – 11:45

Übung 1, 8, 9

Format

- online, WebEx, live
- Notizen hinterher / vorher → Homepage

Anmeldung

- CM
- Whiteboard

Fragen → jederzeit

Kommunikation

- Vorlesung → WebEx
- E-Mail-Verteiler (Whiteboard)
- Homepage:
  - Termine, Kontakt, ...
  - VL-Notizen
  - Übungszettel
- Mattermost Team-Chat
  - FB-Accounts
  - Einladung per E-Mail

Übungszettel

- Di → Fr 12:00
- 2er-Abgabe
- 60% Punkte ⇒ „aktive Teilnahme"
- mind. einmal vorrechnen

2

Klausur: ? tba

Voraussetzungen: Ana I
(Lin A)

Literatur

- O. Forster „Analysis 2"
  (über FU-Netz verfügbar)
- H. Heuser „Analysis 2"
  - viel Erklärtext
- K. Königsberger „Analysis 2"
  - sehr elegant
  - etwas anspruchsvoller
  - enthält auch Ana 3
- W. Rudin „Principles of Math. Ana"

Finden Sie Ihr Buch!

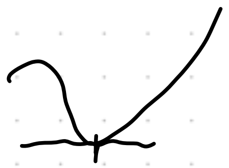
Fragen?

3 0 Motivation

Minimierungsproblem

Finde Minimum von $f: M \to \mathbb{R}$

Ana 1



$f'(x) = 0$

Ana 2

$\boxed{f'(x) = 0}$?

Existenz von Extrema?

Nichtlineare Gleichungssysteme

$F(x) = 0$

Zeitabhängige Probleme

Gesucht: $x\ [0,T] \to \mathbb{R}^n$

$x'(t) = F(x(t), t)$, $x(0) = x_0$

Inhalt

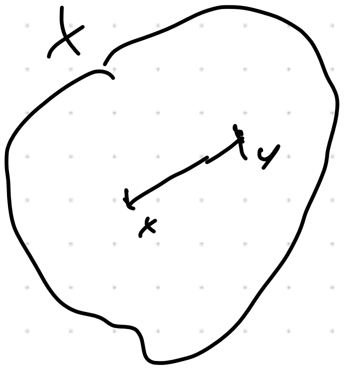
- Topologie
  - Konvergenz / Stetigkeit / Kompaktheit, ...
  - Länge, Abstände, ...
- Differentialrechnung
  - $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
  - Diff.barkeit, Extrema, ...
- Iterierte Integrale

  $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dx\, dy$

- Gewöhnliche DGLen

④

1. Metrische Räume



Was ist der Abstand zweier Punkte?
Unterschiedliche Möglichkeiten
- Luftlinie
- zu Fuß / per Rad / BVG

__Formal__: Abbildung $(x,y) \mapsto \mathbb{R}$

__Def 1.1__ Sei X eine Menge und $d: X \times X \to \mathbb{R}$. Dann heißt d eine __Metrik auf X__, wenn gilt

(1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (Symmetrie)

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

(Dreiecks-Ungleichung)

und (X,d) heißt dann ein __metrischer Raum__.

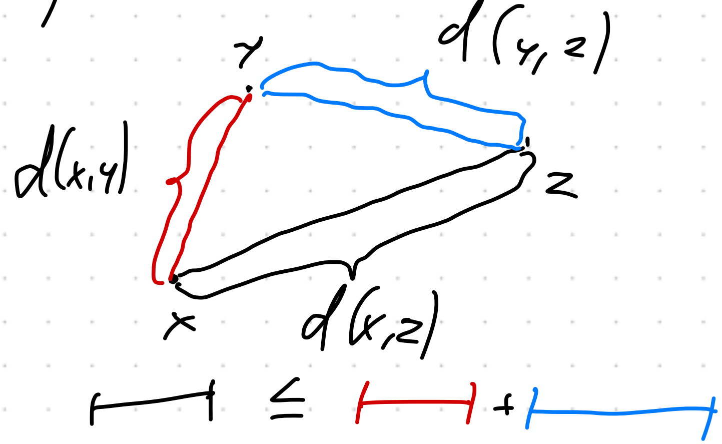
__Anschaulich__

$d(x,y) \mathrel{\hat{=}}$ Abstand von x und y

(1) verschiedene Punkte haben Abstand $\neq 0$

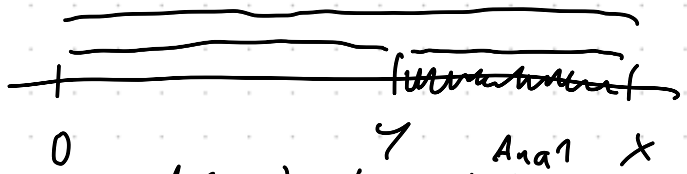
(2) Abstand x zu y = y zu x

(3) „Umwege sind länger"



5 Beispiele

a) Auf $\mathbb{R}$ def. $d(x,y) = |y-x|$



(1) $0 = d(x,y) = |y-x| \overset{\text{Ana 1}}{\Leftrightarrow} y - x = 0$
$\Leftrightarrow y = x$

(2) $d(x,y) = |y-x| \overset{\text{Ana 1}}{=} |x-y| = d(y,x)$

(3) $d(x,z) = |z-x| = |z \overbrace{-y+y}^{=0} - x|$
$\overset{\text{Ana 1}}{\leq} |z-y| + |y-x|$
$= d(x,y) + d(y,z)$

b) Sei X eine Menge und
$d: X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

d heißt diskrete Metrik.

Lemma 1.2 Sei (X,d) ein metr. Raum, dann gilt $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X$.

Beweis $0 \overset{(1)}{=} d(x,x) \overset{(3)}{\leq} d(x,y) + d(y,x)$
$\overset{(2)}{=} d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$
$\Rightarrow 0 \leq 2d(x,y)$. ☒

Wichtiger Spezialfall:

Def 1.3 Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann heißt eine Abbildung $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V, wenn gilt:

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (definit)

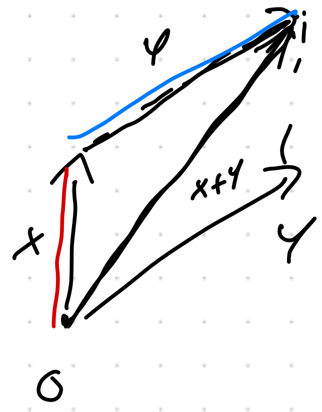
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ (1-homogen)

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x,y \in V$
(Δ's-Ungleichung)

$(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum

⑥ **Bsp** $|\cdot|$ ist Norm auf $\mathbb{R}$.

Δ's Ungl.



Norm $\|x\|$ Länge eines Vektors

Metrik $d(x,y)$ Abstand von Punkten

Satz 1.4 Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d: V \times V \to \mathbb{R}$ mit $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik auf V.

Beweis Wie Beispiel a)