

(7) Satz 1.4 Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann ist (V, d) mit $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metr. Raum.

Beweis

(1)

a) $0 = d(x, y) = \|x - y\| \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\|$
 $\stackrel{(2)}{=} |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x)$

c) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\|$
 $\stackrel{(3)}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$

Norm: $\|v\|$ Länge eines Vektors v

Metrik: $d(x, y)$ Abstand zwischen Punkten x, y

Bemerkung $d(x, y) = \|x - y\|$ heißt von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

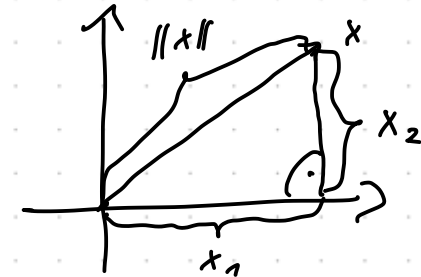
Beispiel: Euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\text{Lin A})$$

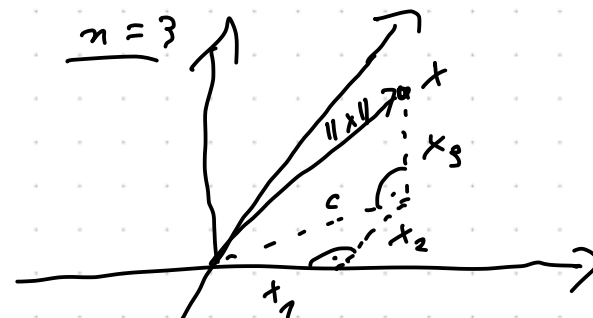
Euklidische Norm

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

z.B. $n=2$



$n=3$



$$c = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\|x\| = \sqrt{c^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

⑧

$\|\cdot\|$ ist eine Norm

$$(1) \quad 0 = \|x\| \Leftrightarrow 0 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i^2}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow x_i^2 = 0 \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0 \quad \forall i \Leftrightarrow x = 0$$

$$(2) \quad \|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} \\ = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \|x\|$$

$$(3) \quad \|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \\ = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2 \\ = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \stackrel{(*)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Cauchy-Schwarz - Ungleichung (Lin A)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Beispiel: $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $1 \leq p < \infty$ mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ (siehe Forst, Ana 1)

(1), (2) wie oben, (3) Hölder'sche Ungleichung.

Spezialfälle $p=2$ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|x\|$

$p=1$ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Ferner def.: $p=\infty$ $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Maximumsnorm

Allgemein $\|\cdot\|_p$ heißt p -Norm

Bem Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \|x\|_\infty$$

Skizze: Für $p \gg 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p \approx \max\{|x_i|\}^p = \|x\|_\infty^p$$

⑨ Beispiel Sei $1 \leq p < \infty$ und
 $C[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}.$

Dann ist

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

eine Norm auf $C[a, b]$ (ohne Beweis).

Beispiel $p = \infty$ Sei Ω eine Menge
 und $B(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \underbrace{f \text{ beschränkt}}\}$
 d.h. $\exists C$ mit $|f(x)| \leq C \forall x \in \Omega$

(Bem. $C[a, b] \subseteq B([a, b])$).

Dann ist $B(\Omega)$ ein Vektorraum und

$$\|f\|_\infty := \sup \{ |f(x)| \mid x \in \Omega \} < \infty$$

ist eine Norm auf $B(\Omega)$, also für
 $\Omega = [a, b]$ auch auf $C[a, b]$.

Beweis O. Forster, Ana 2.

$\|f\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ und Funktionen
 f heißt L^p -Norm.

(Ausblick: Ana 3: $L^p(\Omega)$)

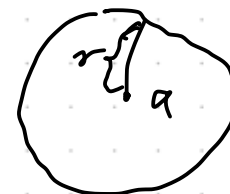
Def 1.5 Sei (X, d) ein metr. Raum,

$a \in X$ und $r > 0$, dann heißt

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

die offene Kugel

mit Radius r um a .



Bem Für normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$
 (mit $d(x, y) = \|x - y\|$)

gilt

$$B_r(a) = \{x \in V \mid \|x - a\| < r\}$$

wie in $\mathbb{R}$ (Ana 1)

(10) Beispiel $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p < 1\}$$

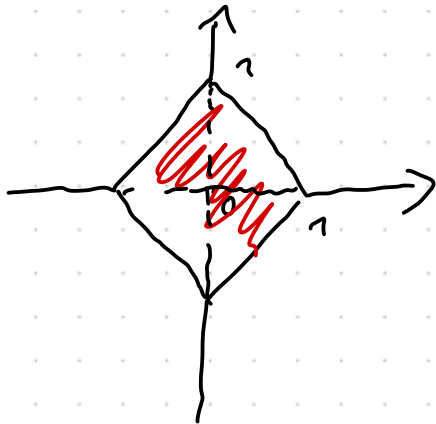
$$n=1$$

$$p=1, p=2, p=\infty, p \in [1, \infty]$$

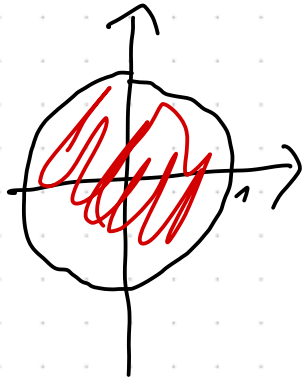


$$n=2$$

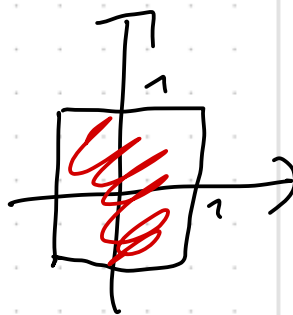
$$p=1$$



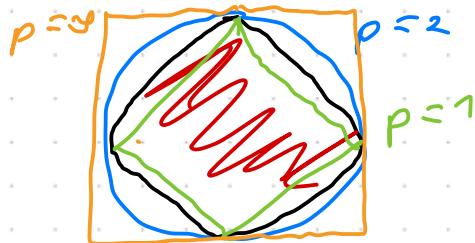
$$p=2$$



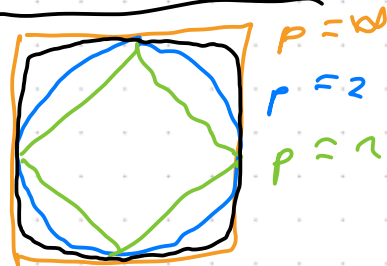
$$p=\infty$$



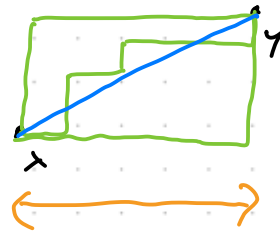
$$1 < p < 2$$



$$2 < p < \infty$$



Längen $n=2$



$$\|y-x\|_1 = |y_1-x_1| + |y_2-x_2|$$

$$\|y-x\|_2 = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$$

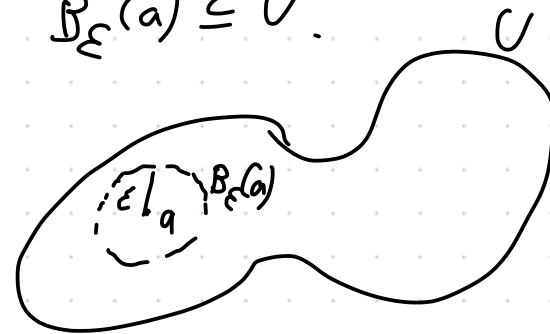
$$\|y-x\|_\infty = \max(|y_1-x_1|, |y_2-x_2|)$$

Def 1.6 Sei (X,d) ein metrischer Raum,

$a \in X$. Dann sei $U \subseteq X$ eine

Umgebung von a , wenn $\varepsilon > 0$ existiert

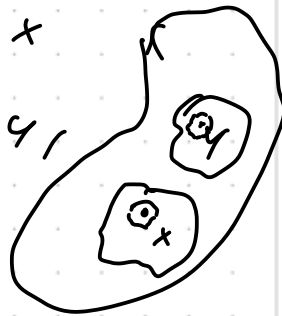
mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U$.



Bemerkung $B_r(a)$ ist Umgebung von a .

(11) Satz 1.7 (Hausdorff'sche Trennungseigenschaft)

Sei (X, d) ein metr. Raum. Dann ex. zu je zwei verschiedenen Punkten aus X disjunkte Umgebungen, d.h.
 $\forall x, y \in X, x \neq y$ ex. $U, V \subseteq X$ mit U ist Umgebung von x ,
 V ist Umgebung von y ,
und $U \cap V = \emptyset$.



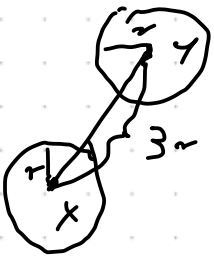
Beweis Seien $x, y \in X, x \neq y$. Dann gilt $d(x, y) > 0$. Setze $r := \frac{1}{2} d(x, y) > 0$

und $U = B_r(x), V = B_r(y)$.

Ang. es ex. $z \in U \cap V$. Dann gilt

$$3r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r \quad \text{⚡}$$

Also $U \cap V = \emptyset$. □



Vorab:

Def 1.9 Sei (X, d) metr. Raum.

Dann heißt $U \subseteq X$ offen, wenn U Umgebung aller $x \in U$ ist, d.h.,
 $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

