

(12) Lemma 1.8 Sei (X, d) metr. Raum,
 $a \in X, r > 0$. Dann ist $B_r(a)$
 Umgebung aller Punkte $x \in B_r(a)$.

Beweis Sei $x \in B_r(a)$, dann gilt
 $d(x, a) < r$. Setze nun
 $\varepsilon = r - d(x, a)$. Dann gilt
 $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(a)$, denn für $y \in B_\varepsilon(x)$
 gilt
 $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a)$
 $< \varepsilon + d(x, a)$
 $= r$
 also $y \in B_r(a)$.



Diese Eigenschaft verallgemeinern wir.

Def 1.9 Sei (X, d) metr. Raum.

Dann heißt $U \subseteq X$ offen, wenn sie
 Umgebung aller $x \in U$ ist, d.h.
 zu jedem $x \in U$ ex. $\varepsilon > 0$ mit
 $B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

Bem Nach Lemma 1.8 sind offene Kugeln
 offen.

Bem Für den metr. Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit
 $d(x, y) = |x - y|$ stimmt die
 Def. genau mit Aaa 1 überein.
 z.B. (a, b) offen.

(13)

Satz 1.10 Sei (X, d) metr. Raum.

Dann gilt:

a) $\emptyset$ und X sind offen

b) endl. Schritte offener Mengen sind offen, d.h. sind $U_1, \dots, U_n$ offen, dann ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i = \{x \mid x \in U_i \forall i\}$ offen.

c) bel. Vereinigungen offener Mengen sind offen, d.h.: Sei I eine Indexmenge und U_i offen $\forall i \in I$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ mit } x \in U_i\}$ offen. Beweis: Übung.

Bem l. A. sind nur endl. Schritte offen.

Gegenbsp: $X = \mathbb{R}$ und

$$U_n = B_{\frac{1}{n}}(0) = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Dann U_n offen für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$$

ist nicht offen, denn

$$B_\varepsilon(0) \not\subseteq \{0\} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

BSP (X, d) , $d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$

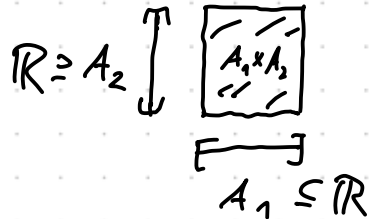
Dann ist jedes $U \subseteq X$ offen.

Dann für $x \in U$ gilt

$$B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \subseteq U.$$

(19) Def. 1.11 Sei (X, d) metr. Raum.
 Dann heißt $A \subseteq X$ abgeschlossen,
 wenn $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel - abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$
 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$
 - $\emptyset, X$ abgeschlossen (wg. Satz 1.10 a)
 - Sei $A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen,
 dann ist auch $A_1 \times A_2 \in \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}_{\mathbb{R}^{n+m}}$
 abgeschlossen. (Übung)
 (Achtung: bzgl. welcher Metrik)



$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 &= \{(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\} \\ &\subseteq \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m} \end{aligned}$$

Lemma 1.12 In $\mathbb{R}^n$ gilt
 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Beweis $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
 $= |x_i| = \sqrt{|x_i|^2}$
(Furieri) $\leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2$
 $\leq \sqrt{\underbrace{|x_i|^2 + \dots + |x_i|^2}_{n \text{-mal}}}$
 $= \sqrt{n |x_i|^2} = \sqrt{n} |x_i|$
 $= \sqrt{n} \|x\|_\infty$

$$(15) \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

Konsequenz

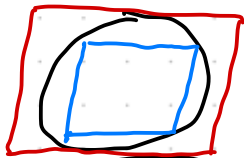
$$\|x\|_2 < r \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 < r$$

$$\Rightarrow \left[x \in B_{r, \|\cdot\|_2}(x) \Rightarrow x \in B_{r, \|\cdot\|_\infty}(x) \right]$$

$$\Rightarrow B_{r, \|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq B_{r, \|\cdot\|_2}(x)$$

$$\|x\|_\infty < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} r}_{r'} \Rightarrow \|x\|_2 < r$$

$$\Rightarrow B_{r', \|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq B_{r, \|\cdot\|_2}(x)$$



$$B_{r', \|\cdot\|_\infty}(a) \subseteq B_{r, \|\cdot\|_2}(a) \subseteq B_{r, \|\cdot\|_\infty}(a)$$

d.h. U ist Umgebung bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow U$ ist Umgebung bzgl. $\|\cdot\|_2$

U offen (bzw. abgeschl.) bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow$ ————— $\vee$ ————— bzgl. $\|\cdot\|_2$

(15)

Bem / Ausblick

- Tatsächlich gilt für zwei bel. Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf $\mathbb{R}^n$ immer: Es ex. $C_1, C_2 > 0$ mit
$$C_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq C_2 \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

d.h. egal welche Norm wir auf $\mathbb{R}^n$ verwenden, wir bekommen immer die gleichen Umgebungen, offene/abgeschl. Mengen.

- Das gleiche gilt für bel. endlich. dim VRe.

- Achtung: Das gilt nicht in ∞ -dim VRen.

$\rightarrow$ Funktionalanalysis

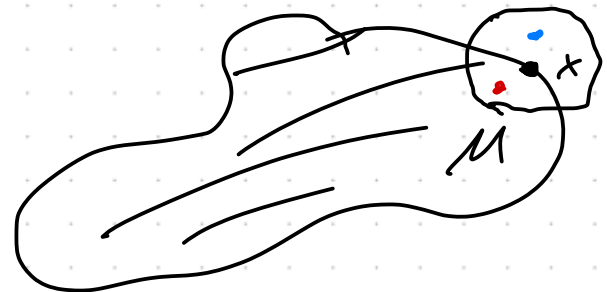
Def 1.73 Sei (X, d) met. Raum und $M \subseteq X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt Randpunkt von M , wenn für jede Umgebung U von x gilt

$$\underline{(U \cap M) \neq \emptyset} \text{ und } \underline{U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset}.$$

Die Menge

$$\partial M := \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } M\}$$

heißt der Rand von M .



17 Satz 1.14 Sei (X, d) metr. Raum
und $M \subseteq X$. Dann gilt

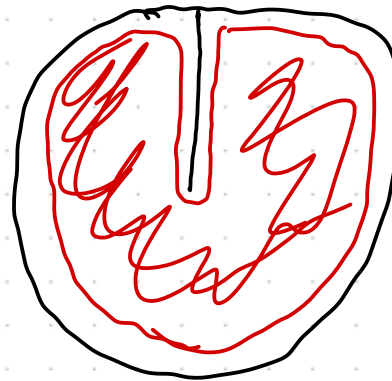
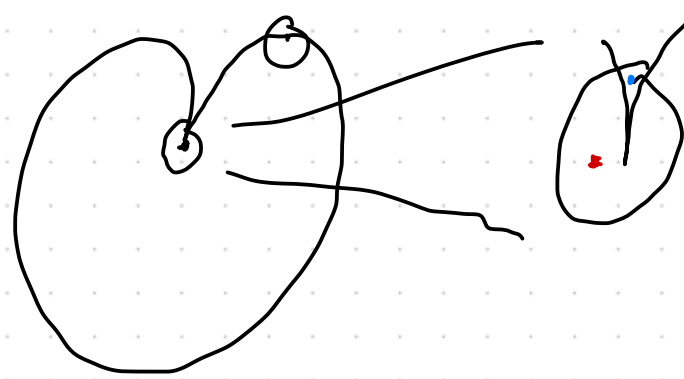
- a) $M \setminus \partial M$ ist offen
- b) $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen
- c) ∂M ist abgeschlossen

Def 1.15 Sei (X, d) metr. Raum
und $M \subseteq X$. Dann heißt

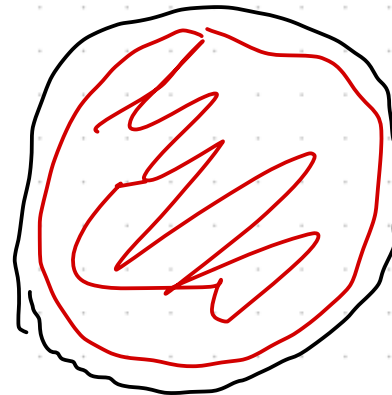
$M^\circ := M \setminus \partial M$
das (offene) Innere von M

und
 $\bar{M} := M \cup \partial M$
der Abschluß von M .

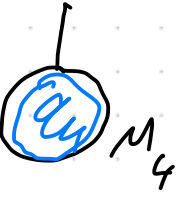
Ben M° offen, $\bar{M}$ abgeschl.



M_1
 ∂M_1



M_2
 ∂M_2



$$M_3^\circ = M_4^\circ$$

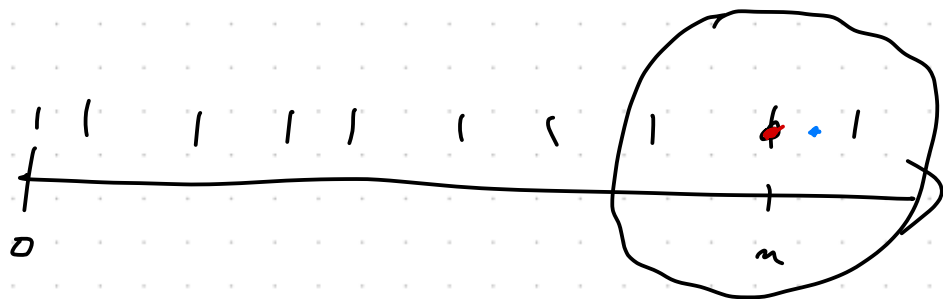
$$\bar{M}_3 = M_3$$

$$\subsetneq M_4 = \bar{M}_4$$

$$\bar{M}_1 = M_1 \cup \partial M_1 = M_2 \cup \partial M_2 = \bar{M}_2$$

$$M_1^\circ = M_1 \subseteq M_2 = M_2^\circ$$

78) Beispiele a) $M = \mathbb{N}$ M abgeschlossen
 $\partial M = M = \overline{M}$



$$b) M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$



$$M \subseteq \partial M, \quad 0 \in \partial M$$

$$\partial M = \{0\} \cup M$$

$$\Rightarrow \overline{M} = M \cup \partial M = \{0\} \cup M$$

$$M^\circ = M \setminus \partial M = \emptyset$$

M weder offen noch abgeschl.