(19) **Erinnerung** $x \in X$ Randpunkt von M

$\Leftrightarrow \forall U \subseteq X$, U Umgebung von x

$U \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$

Rand

$$\partial M = \{x \in X \mid x \text{ ist Randpunkt von } M\}$$

Innere

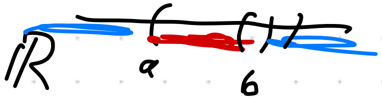
$$M^\circ = M \setminus \partial M$$

Abschluß

$$\overline{M} = M \cup \partial M$$

$X = \mathbb{R}$

Beispiel $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$



a) $M = (a,b)$, $\partial M = \{a,b\}$

$M^\circ = (a,b)$, $\overline{M} = [a,b]$

b) $M = [a,b]$, $\partial M = \{a,b\}$

$M^\circ = (a,b)$, $\overline{M} = [a,b]$

c) $M = (a,b]$, $\partial = \{a,b\}$

$M^\circ = (a,b)$, $\overline{M} = [a,b]$

Beispiel $X = (0,2]$, $d(x,y) = |x-y|$

$M := (0,1)$, dann $\partial M = \{1\}$

$M^\circ = (0,1)$ offen in X

$\overline{M} = (0,1]$ abgeschlossen in X

$U := (0,2)$, dann $\partial U = \emptyset$

$U^\circ = (0,2)$, $\overline{U} = (0,2)$

20

<u>Satz 1.19</u> Sei (X,d) ein metr. Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt:

a) $M^\circ = M \setminus \partial M$ ist offen

b) $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen

c) ∂M ist abgeschlossen

<u>Beweis</u> Setze $M' := X \setminus M$

a) Sei $a \in M^\circ = M \setminus \partial M$. Dann ex $\varepsilon > 0$ mit
$$B_\varepsilon(a) \cap (X \setminus M) = \emptyset \quad (1)$$

Sonst wäre $a \in \partial M$. Somit gilt $B_\varepsilon(a) \subseteq M$. Noch z.z. $B_\varepsilon(a) \subseteq M^\circ$.

<u>Ang.</u> es ex. $y \in B_\varepsilon(a) \cap \partial M$.

Dann ist $B_\varepsilon(a)$ Umgebung von y. (Lemma 1.8)

Wegen (1) kann y kein Randpunkt sein. ↯

Also gilt $B_\varepsilon(a) \cap \partial M = \emptyset$ und $B_\varepsilon(a) \subseteq M^\circ$.

b) Nach Def. gilt
$$x \in \partial M \iff x \in \partial (X \setminus M) = \partial M'$$
also $\partial M = \partial M'$

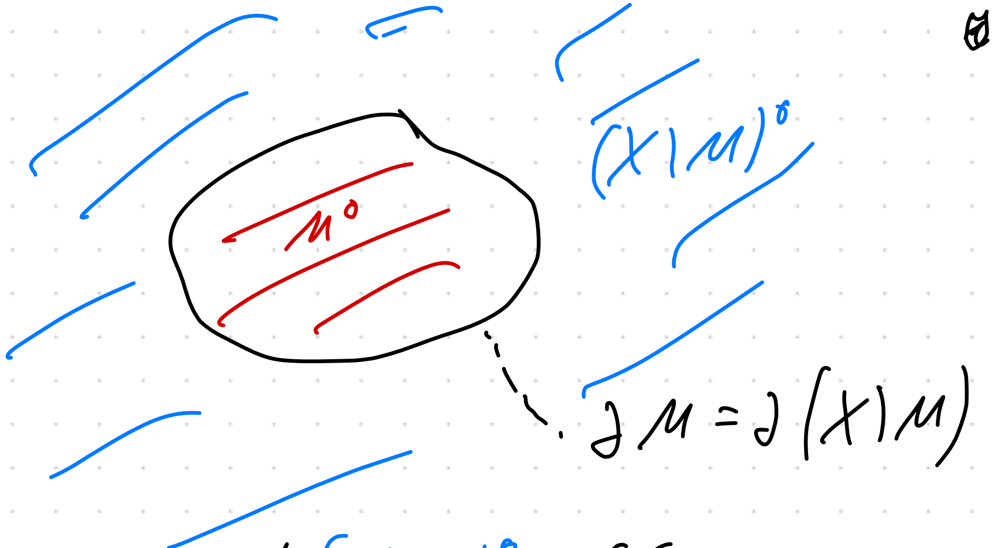
Nach a) ist
$$(M')^\circ = M' \setminus \partial M' \text{ offen.}$$
Also ist
$$X \setminus ((M')^\circ) = X \setminus (M' \setminus \partial M')$$
$$= X \setminus (M' \setminus \partial M)$$
$$= X \setminus M' \cup \partial M = M \cup \partial M = \overline{M}$$
abgeschlossen.

21 c) Es gilt $M^\circ = M \setminus \partial M$ offen und $(M')^\circ = (M') \setminus \partial M$ offen.

Also ist auch

$$M^\circ \cup (M')^\circ = (M\setminus \partial M) \cup ((X\setminus M)\setminus \partial M)$$
$$= (M \cup (X \setminus M)) \setminus \partial M$$
$$= X \setminus \partial M$$

offen und damit ∂M abgeschlossen. ∎



- M° und $(X\setminus M)^\circ$ offen
- $\partial M = \partial(X\setminus M)$, $M^\circ \cup \partial M$, $(X\setminus M)^\circ \cup \partial M$ abgeschlossen

Def 1.16 Sei (X,d) ein metr. Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt (x_n) **konvergent** gegen $x \in X$, wenn gilt

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Für jede Umgebung } U \text{ von } x \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ x_n \in U \ \ \forall n \geq n_0 \end{array} \right.$

Dann heißt x **Grenzwert** von (x_n) und wir schreiben $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$x_n \to x$.

Bem Äquivalent zu (1) ist

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ x_n \in B_\varepsilon(x) \ \ \forall n \geq n_0$

oder

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ d(x_n, x) < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0$

in Ana I: $|x_n - x|$

22

Lemma 1.17 Sei (X,d) ein metr. Raum und (x_n) eine konvergente Folge in X. Dann ist der Grenzwert eindeutig, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ x_n \longrightarrow y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

Beweis Wir verwenden die Hausdorffsche Trennungseigenschaft:

Ang $x_n \to x$, $x_n \to y$ und $x \neq y$.
Dann ex. Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.
Wegen $x_n \to x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ $\forall n \geq n_0$,
also $x_n \notin V$ $\forall n \geq n_0$. D.h. es sind höchstens endl. viele x_n in V.
D.h. x_n kann nicht gegen y konv. $\boxtimes$

Notation Falls $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ schreibe

$$\lim_{n\to\infty} x_n := x.$$

Beobachtung: Um $x_n \to x$ zu definieren brauchen wir nur Umgebungen keine Abstände!

Können wir Umgebungen auch ohne eine Metrik definieren?

$\longrightarrow$ topologische Räume

Jetzt kurzer Ausblick zu top. Räumen.
Mehr: VL Topologie.
(VL Funk. Analysis)

23 Topologische Räume

Erinnerung / Notation:
Für eine Menge X heißt
$$\mathcal{P}(X) := 2^X := \{M \subseteq X\}$$
die Potenzmenge von X.

Def. 1.18 Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X mit

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

c) Sei I eine Indexmenge und $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$, dann gilt auch
$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}.$$

Dann heißt: $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

In einem top. Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt $M \subseteq X$

offen, falls $M \in \mathcal{T}$,

abgeschlossen, falls $(X \setminus M) \in \mathcal{T}$.

Satz 1.19 Sei (X,d) ein metr. Raum und $\mathcal{T} := \{M \subseteq X \mid M \text{ offen bzgl. } d\}$.

Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum und $M \subseteq X$ offen bzgl. $\mathcal{T}$ genau dann, wenn M offen bzgl. d.

Beweis: Das folgt direkt aus Satz 1.10. ∎

Das $\mathcal{T}$ aus Satz 1.19 heißt die von d induzierte Topologie.

Def 1.20 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum, $x \in X$, $U \subseteq X$. Dann heißt U eine Umgebung von x, falls eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ ex. mit $x \in O \subseteq U$.

Def. 1.21 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. Dann heißt $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, wenn zu $x, y \in X$, $x \neq y$, Umgebungen U von x und V von y ex. mit $U \cap V = \emptyset$.

Bem Nach Satz 1.7 ist jeder metr. Raum ein Hausdorff-Raum.

---

normierter Raum $\Rightarrow$ metr. Raum $\Rightarrow$ Hausdorff-Raum $\Rightarrow$ top. Raum

Bsp: a) Sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum.

$\Rightarrow$ alle $M \subseteq X$ sind offen und abgeschl.

$\Rightarrow$ feinste mögliche Topologie

$(X, \mathcal{T})$ ist ein Hausdorff-Raum, denn

$$\left.\begin{array}{l} U = \{x\} \text{ ist Umg. von } x \\ V = \{y\} \text{ ist Umg. von } y \end{array}\right\} x \neq y \Rightarrow U \cap V = \emptyset.$$

b) Sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum.

$\Rightarrow$ nur $\emptyset$ und X offen und abgeschlossen.

$\Rightarrow$ gröbste mögliche Topologie.

Ang. X hat mind. zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$, $x \neq y$, dann ist $(X, \mathcal{T})$ kein Hausdorff-Raum:

Ang. U Umgebung von x, d.h. $\exists O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Es muß $X = O = U$, also $y \in U$.