(25)

Def 1.22 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum.

Def. dann: $x_n \to x$ bzgl. $\mathcal{T}$

wie in Def. 1.16:

$\forall U \subseteq X$, U Umgebung von x
$\exists n_0 \in \mathbb{N}: x_n \in U \quad \forall n \geq n_0$

Lemma 1.23 In einem Hausdorff-Raum sind Grenzwerte konv. Folgen eindeutig.

Beweis Wörtlich wie in Lemma 1.17. ∎

Bsp a) Sei X bel. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$,
d.h. alle Mengen $M \subseteq X$ sind offen und abgeschlossen.

Es gelte $x_n \to x$. Dann ist $U = \{x\} \in \mathcal{T}$,
d.h. U ist Umgebung von x. Also ex.
$n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\quad x_n \in U = \{x\} \quad \forall n \geq n_0$.

D.h. $\quad x_n = x \quad \forall n \geq n_0$.

Hier gilt $x_n \to x \iff$ Ab einem x_{n_0} ist $x_n = x$ konst.

Erinnerung $(X, \mathcal{T})$ ist Hausdorff-Raum.

(26)

Bsp b) Sei X bel. $\mathcal{J} = \{\emptyset, X\}$. Dann ist $(X, \mathcal{J})$ top. Raum aber kein Hausdorff-Raum. Sei (x_n) Folge in X und $x \in X$. Dann gilt $x_n \to x$.

Beweis Sei $x \in X$ bel. und U eine Umgebung von x, d.h. $\exists O \in \mathcal{J}: x \in O \subseteq U$.

Also muß gelten $O = X$, d.h. $U = X$.

Somit gilt $x_n \in U \quad \forall n \geq 0$. $\square$

D.h. alle Folgen konvergieren gegen alle Punkte!

Das ist kein Hausdorff-Raum.

Mehr dazu in VL Topologie.

Ab jetzt wieder metr. Räume.

Satz 1.24 Sei (x_k) Folge in $\mathbb{R}^n$, dann gilt: $x_k \to a \in \mathbb{R}^n$ (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ oder $\|\cdot\|_2$) genau dann, wenn

$$x_{k,i} \longrightarrow a_i \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$

D.h. eine Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert.

Bem $x_k \to a$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Leftrightarrow x_k \to a$ bzgl. $\|\cdot\|_2$

Denn $x_k \to a \Leftrightarrow x_k - a \to 0$

$\Leftrightarrow \|x_k - a\| \to 0$

(27) **Beweis** a) Es gelte $x_k \to a$. Sei $i = \{1, \dots, n\}$.

Z.z.: $x_{k,i} \to a_i$

Sei $\varepsilon > 0$, dann ex. $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_k - a\|_\infty = d(x_k, a) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Also gilt

$$|x_{k,i} - a_i| \leq \max\{|x_{k,j} - a_j| \mid j = 1, \dots, n\}$$
$$= \|x_k - a\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Also $x_{k,i} \to a_i$.

b) Nun gelte $x_{k,i} \to a_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Z.z. $x_k \to a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ $k_{0,i} \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_{k,i} - a_i| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_{0,i}.$$

Setze nun $k_0 = \max\{k_{0,1}, \dots, k_{0,n}\}$.

Dann gilt

$$|x_{k,i} - a_i| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \geq k_{0,i},$$

also gilt auch

$$d(x_k, a) = \|x_k - a\|_\infty$$
$$= \max\{|x_{k,i} - a_i| \mid i = 1, \dots, n\}$$
$$< \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Also $x_k \to a$. $\blacksquare$

Bem Tatsächlich gilt das für bel. Normen auf $\mathbb{R}^n$. (später)

(28)

Satz 1.25 Sei (X,d) metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

a) A ist abgeschlossen

b) Ist (x_n) eine Folge in A mit $x_n \to x \in X$, dann gilt $x \in A$.

Beweis $a) \Rightarrow b)$: Sei A abgeschlossen und (x_n) eine Folge in A mit $x_n \to x$.

z.z. $x \in A$.

Ang $x \notin A$. Da $X \setminus A$ offen, ex. $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$, d.h. $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$.

Nun ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in B_\varepsilon(x) \qquad \forall n \geq n_0,$$

also $x_n \notin A \quad \forall n \geq n_0$. $\lightning$

$b) \Rightarrow a)$ Es gelte b).

z.z. A abgeschl. bzw. $X \setminus A$ offen.

Sei $x \in X \setminus A$. Wir zeigen, dass $\varepsilon > 0$ ex. mit $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$.

Ang das gilt nicht. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subseteq X \setminus A.$$

Also $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$. Sei nun $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Dann ist (x_n) eine Folge in A. Und es gilt

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

und somit $x_n \to x$. Wegen b) gilt dann $x \in A$. $\lightning$ $\square$

Def 1.26 Sei (X,d) metr. Raum und (x_n) Folge in X. Dann heißt (x_n) Cauchy-Folge, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}: \; d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

(29)

Lemma 1.27

Es gilt (x_n) konvergent $\Rightarrow$ (x_n) ist Cauchy-Folge.

Beweis Es gelte $x_n \to x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann gilt für $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

$\boxtimes$

Def 1.28 Ein metr. (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede CF in X konvergiert.

Satz 1.29 $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

Beweis Sei (x_k) CF in $\mathbb{R}^n$.

zu $\varepsilon > 0$ ex. k_0 mit

$$|x_{k,i} - x_{m,i}| \leq \|x_k - x_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall m, k \geq k_0$$

Also ist $(x_{k,i})_{k \in \mathbb{N}}$ ist CF in $\mathbb{R}$.

Da $\mathbb{R}$ vollständig ex $a_i \in \mathbb{R}$ mit

$$x_{k,i} \to a_i.$$

Nach Satz 1.24 gilt dann

$$x_k \to a$$

für $a = (a_1, \dots, a_n)$. $\boxtimes$

Bsp Sei $d(x,y) = |x-y|$. Dann ist $(\mathbb{Q}, d)$ ein metr. Raum, aber nicht vollständig.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. (X,d) ist vollständig $\Leftrightarrow$ X abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Bsp $(\mathbb{Q}, d)$, $((0,1), d)$ nicht vollst.; $([0,1], d)$ vollständig.

(30) Bem Ist (X,d) vollst. metr. Raum und $Y \subseteq X$. Dann (Y,d) metr. Raum. Und (Y,d) ist vollständig $\Leftrightarrow$ $Y \subseteq X$ abgeschlossen in X.