

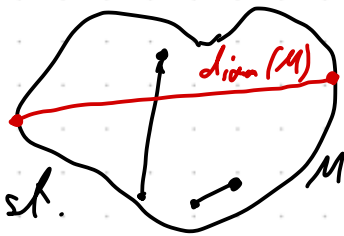
(31)

Def 1.30 Sei (X, d) metr. Raum
und $M \subseteq X$. Dann heißt

$$\text{diam}(M) := \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in M \}$$

$$\in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

der Durchmesser von M . M heißt beschränkt,
wenn $\text{diam}(M) < \infty$.



Satz 1.31 Sei (X, d) vollst.
metr. Raum und

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

eine absteigende Folge nicht leerer,
abgeschlossener Teilmengen von X mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(A_k) = 0.$$

Dann ex. genau ein Punkt x mit
 $x \in A_k \forall k$, bzw. $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{x\}$.
(Schachtelungsprinzip)

Beweis (Ex.) Zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $x_k \in A_k$.

Dann ex. zu $\varepsilon > 0$ ein k_0 mit

$$\text{diam}(A_k) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Wegen $x_m \in A_m \subseteq A_{k_0}$ für $m \geq k_0$ gilt

$$d(x_m, x_k) < \varepsilon \quad \forall m, k \geq k_0.$$

D.h. (x_k) ist CF. Da X vollständig
ex. $x \in X$ mit $x_k \rightarrow x$.

Nun gilt für jedes A_n

$$x_k \in A_k \subseteq A_n \quad \forall k \geq n.$$

Da A_n abgeschlossen ist muß auch

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in A_n$$

gelfen.

(Eindeutigkeit) Ang es ex. $x, y \in A_k \forall k \in \mathbb{N}$

und $x \neq y$, dann gilt

$$d(x, y) \leq \text{diam}(A_k) \quad \forall k.$$

Also gilt wegen $\text{diam}(A_k) \rightarrow 0$ auch
 $d(x, y) = 0$ $\square$

32

Beispiel a) $A_k = \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$

$$\text{diam}(A_k) = \frac{2}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] = \{0\}.$$

b) $A_k = \left[0, 1 + \frac{1}{k}\right]$

$$\text{diam } A_k \rightarrow 1$$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = [0, 1]$$

c) $X = \mathbb{Q}$ nicht vollstf.

$$A_k = \mathbb{Q} \cap \left[\sqrt{2} - \frac{1}{k}, \sqrt{2} + \frac{1}{k}\right]$$

$$\text{diam } A_k = \frac{2}{k} \rightarrow 0$$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset.$$

d) $A_k = \left(0, \frac{1}{k}\right)$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$$

Stetigkeit

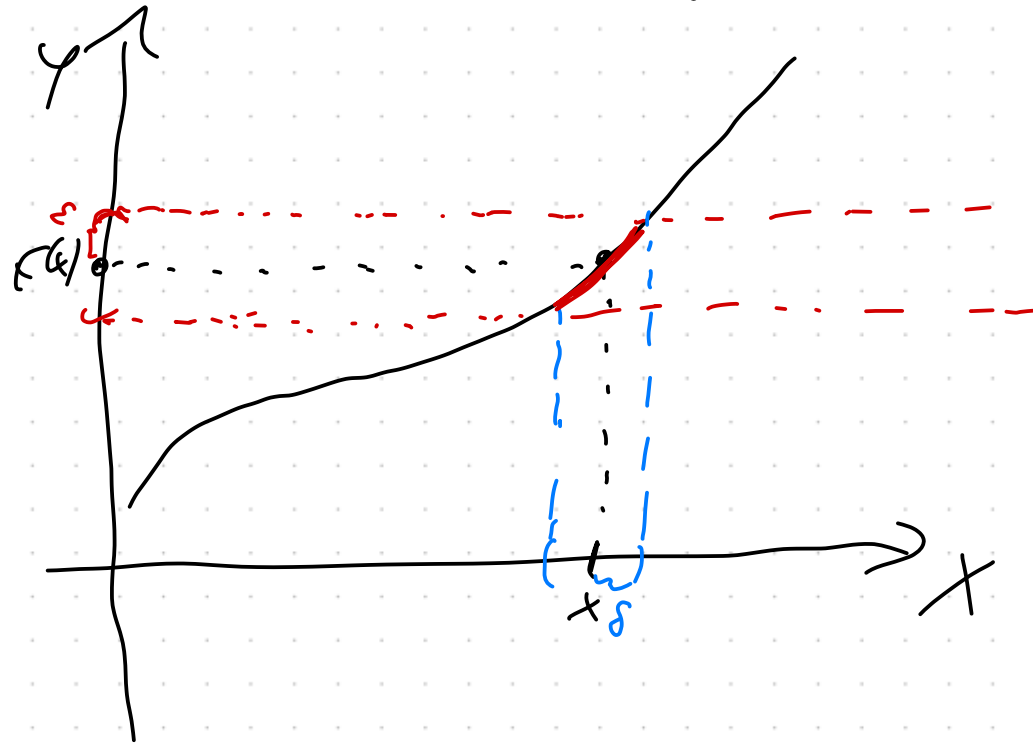
Def 1.32 Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metr. Räume

und $f: X \rightarrow Y$. Dann heißt f stetig in $x \in X$,
wenn gilt (ε - δ -Kriterium)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall y \in X$$

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

f heißt stetig, wenn f stetig in allen $x \in X$ ist.



(33)

Satz 1.33 Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$
metr. Räume und $f: X \rightarrow Y$,
dann sind äquivalent

- a) f stetig in $x \in X$
- b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

Ferner sind äquivalent

- c) f stetig
- d) Urbilder offener Mengen sind offen,
d.h. $M \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(M) \subseteq X$ offen
- e) Urbilder abgeschl. Mengen sind abgeschl.,
d.h. $M \subseteq Y$ abgeschl. $\Rightarrow f^{-1}(M) \subseteq X$ abgeschl.

Beweis a) $(\Rightarrow)$ b) trivial $\checkmark$

c) $(\Rightarrow)$ d) $(\Rightarrow)$ e) $\rightarrow$ Übung

Bem In top. Räumen ist Stetigkeit
durch d) definiert.

Def 1.34 Seien X, Y metr. Räume,
 $f: X \rightarrow Y, x \in X$. Def. dann:

$$\lim_{j \rightarrow x} f(j) = y$$

$:(\Leftrightarrow) \forall (x_n) \text{ in } X \text{ gilt } (x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow y).$

34

Satz 1.35 (Folgenstetigkeit)

Seien X und Y metr. Räume,
 $f: X \rightarrow Y$, $x \in X$, dann gilt

$$f \text{ stetig in } x \Leftrightarrow \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Beweis " $\Rightarrow$ " Sei f stetig in x (ε - δ -Kriterium).

Sei (x_n) Folge in X mit $x_n \rightarrow x$. z.z. $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $\delta > 0$ mit

$$(1) \quad d(y, x) < \delta \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

Wegen $x_n \rightarrow x$ ex. zu $\delta > 0$ ein n_0 mit

$$(2) \quad d(x_n, x) < \delta \quad \forall n \geq n_0.$$

Also gilt für $n \geq n_0$ auch (u.g. (1)+(2))

$$d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon.$$

Somit $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

" $\Leftarrow$ " Es gelte $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$. (3)

Ang. das ε - δ -Kriterium ist nicht erfüllt.

Dann gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in X$$

$$d(y, x) < \delta \quad \text{aber} \quad d(f(y), f(x)) \geq \varepsilon.$$

Sei nun dieses $\varepsilon > 0$ fest. Zu $\delta = \frac{1}{n} > 0$

wähle $x_n \in X$ mit

$$(4) \quad d(x_n, x) < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon > 0.$$

Wegen (4) gilt $x_n \rightarrow x$. Wegen (3)

gilt $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Aber wegen (4) gilt $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$. 

Bem: In top. Räumen gilt nur

$$f \text{ stetig in } x \Rightarrow f \text{ folgenstetig in } x$$
$$\left(\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x) \right)$$

(35)

Satz 1.36 Seien X, Y, Z metr. Räume
 $a \in X$, $f: X \rightarrow Y$ stetig in a
 und $g: Y \rightarrow Z$ stetig in $f(a)$.
 Dann ist

$g \circ f: X \rightarrow Z$
 stetig in a .

Beweis Sei (x_n) Folge in X mit
 $x_n \rightarrow a$. Dann gilt (f stetig in a)
 $f(x_n) \rightarrow f(a)$
 und (g stetig in $f(a)$)

$$\underbrace{g(f(x_n))}_{(g \circ f)(x_n)} \rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a) \quad \square$$

Satz 1.37 Sei X ein metr. Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$
 mit $f = (f_1, \dots, f_n)$. Dann ist f genau dann stetig,
 wenn $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Beweis Sei (x_k) Folge in X mit $x_k \rightarrow x$. Dann
 $f(x_k) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow f_i(x_k) \rightarrow f_i(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
 (Satz 1.24) □

(36)

Satz 1.38 Folgende Abb. sind stetig

- a) $\text{add}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{add}(x, y) = x + y$
 b) $\text{sub}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{sub}(x, y) = x - y$
 c) $\text{mult}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{mult}(x, y) = x \cdot y$
 d) $\text{quot}: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{quot}(x, y) = \frac{x}{y}$.

Beweis Sei $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 mit $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
 Nach Satz 1.24 gilt $x_k \rightarrow x$, $y_k \rightarrow y$.

Also

- a) $\text{add}(x_k, y_k) = x_k + y_k \xrightarrow{\text{Ans I}} x + y = \text{add}(x, y)$
 b) $\text{sub}(x_k, y_k) = x_k - y_k \longrightarrow x - y = \text{sub}(x, y)$
 c) $\text{mult}(x_k, y_k) = x_k \cdot y_k \longrightarrow x \cdot y = \text{mult}(x, y)$

Nun gelte zusätzlich $y_k \neq 0 \forall k$, $y \neq 0$.

d) $\text{quot}(x_k, y_k) = \frac{x_k}{y_k} \xrightarrow{\text{Ans I}} \frac{x}{y} = \text{quot}(x, y)$ $\square$

Korollar 1.39 Sei X metr. Raum

und $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann sind auch

a) $f+g: X \rightarrow \mathbb{R}$

b) $f-g: X \rightarrow \mathbb{R}$

c) $f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}$

und falls $g(x) \neq 0 \forall x \in X$

d) $\frac{f}{g}: X \rightarrow \mathbb{R}$
 stetig.

Beweis Nach Satz 1.37 ist auch

$(f, g): X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. Also auch

$f+g: \text{add} \circ (f, g)$

$f-g: \text{sub} \circ (f, g)$

$f \cdot g: \text{mult} \circ (f, g)$

$\frac{f}{g}: \text{quot} \circ (f, g)$

stetig nach
 Satz 1.38 und
 Satz 1.36. $\square$