Def 1.40 Eine Funktion

$$\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

mit

$$\lambda(x_1,\dots,x_n) = x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}$$

heißt (n-variates) Monom vom Grad $r = k_1+\dots+k_n$ auf $\mathbb{R}^n$.

Eine Linearkombination

$$p(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{\sum_{k_1+\dots+k_n\leq r} c_{k_1,\dots,k_n}\, x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}}_{(*)}$$

heiß Polynom vom Grad $\deg(p)\leq r$ auf $\mathbb{R}^n$. Und

$$\deg(p) = \min\{ r \mid p \text{ hat Form } (*) \text{ für } r\}.$$

Beispiel a) $p(x_1,x_2,x_3) = 2x_1+3x_2 \quad \deg(p)=1$

b) $p(x_1,x_2) = 3x_1x_2^3 + 4x_1 - 42x_1x_2 \quad \deg(p)=4$

Korollar 1.41 Polynome auf $\mathbb{R}^n$ sind stetig

Beweis Die Abb. $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto I_k(x_1,\dots,x_n) = x_k$$

ist stetig, weil $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist. Wende nun wiederholt Kor. 1.39 an. $\blacksquare$

(38)

Def 1.42 Seien X, Y metr. Räume. Eine Abb. $f: X \to Y$ heißt <u>Homöomorphismus</u> von X nach Y, wenn f bijektiv ist und $f: X \to Y$ und $f^{-1}: Y \to X$ stetig sind.
X und Y heißen <u>homöomorph</u>, wenn ein Homöomorphismus $f: X \to Y$ ex.

Bem Sind X und Y homöomorph, so verhalten sie sich in topol. Hinsicht identisch, d.h. z.B.

- $x_n \to x$ in $X \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ in Y
- $M \subseteq X$ offen in $X \Leftrightarrow f(M) \subseteq Y$ offen in Y
- –"– abgeschl. in $X \Leftrightarrow$ –"– abgeschl. in Y

Bsp $\mathbb{R}$ und $(-1,1)$ sind homöomorph.

Def. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Dann gilt

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1, \text{ d.h.}$$

$$f: \mathbb{R} \to (-1,1)$$

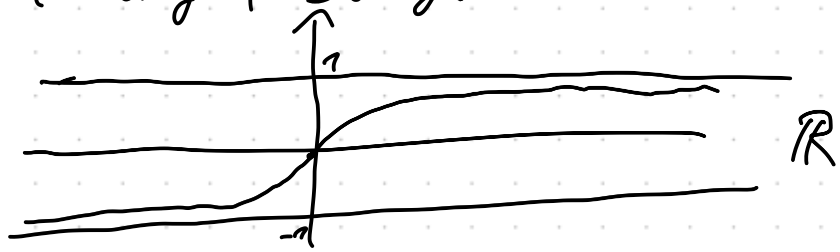
Ferner gilt f streng monoton wachsend (Übung) und für $g: (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ gilt

$$(g \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1 - \left|\frac{x}{1+|x|}\right|} = \frac{x}{1+|x| - |x|} = x,$$

$$(f \circ g)(x) = x.$$

Also $g = f^{-1}$ und f ist inv.bar.

Da $x \mapsto x$ und $x \mapsto |x|$ stetig, sind auch f und $g = f^{-1}$ stetig.



39

Beispiel $X=\mathbb{R}$ und

$d_1(x,y)=|x-y|$

$d_2(x,y)=\begin{cases}0 & ; x=y\\ 1 & ; \text{sonst}\end{cases}$

$(\mathbb{R},d_1)$, $(\mathbb{R},d_2)$ seien

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijektiv.

Dann gilt für $x_n=\frac{1}{n}$ $x_n\to 0$ bzgl. $(\mathbb{R},d_1)$. Dann ist aber $f(x_n)=f(\frac{1}{n})$ nicht konvergent in $(\mathbb{R},d_2)$, denn f ist inj. und in $(\mathbb{R},d_2)$ konvergieren nur Folgen die irgendwann konstant sind.

$\Rightarrow$ f ist kein Homöomorphismus.

$(\mathbb{R},d_1)$, $(\mathbb{R},d_2)$ sind <u>nicht</u> homöomorph.

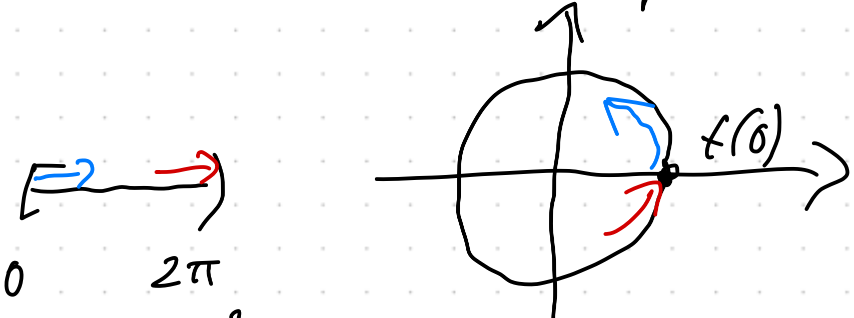
Bsp Sei $X=[0,2\pi)$ und

$K=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid 1=\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\}$.

Def. $f:[0,2\pi)\to K$ mit

$f(t)=(\cos(t),\sin(t))$

Dann ist f bijektiv und stetig, aber kein Homöomorphismus



, denn f^{-1} ist nicht stetig in $(1,0)$.

Tatsächlich sind $[0,2\pi)$ und K <u>nicht</u> homöomorph (ohne Beweis).

(40) **Def 1.43** Sei X eine Menge und (Y, d) ein metr. Raum, $f_n : X \to Y$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f : X \to Y$. Dann heißt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>gleichmäßig konvergent</u> gegen f, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, x \in X.$$

Notation: $f_n \xrightarrow[glm]{} f$

Satz 1.44 Seien X, Y metr. Räume, (f_n) eine Folge stetiger Fkt.en $f_n : X \to Y$ und $f_n \xrightarrow[glm.]{} f$, $f : X \to Y$. Dann ist auch f stetig.

Beweis (Wie in Ana 1) Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ bel..

Da $f_n \xrightarrow[glm.]{} f$ ex $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in X, n \geq n_0.$$

Da f_{n_0} stetig ist, ex $\delta > 0$ mit

$$d(x, x_0) < \delta \implies d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun gilt für $d(x, x_0) < \delta$

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0))$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

■

41

Satz 1.45 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T: X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

a) T ist stetig

b) $\exists C \geq 0$ mit $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$

c) $\exists C \geq 0$ mit $\|T(x)\|_Y \leq C \quad \forall x \in \{z \in X \mid \|z\|_X = 1\}$.

Beweis (Übung)

Def 1.46 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T: X \to Y$ linear und stetig.

Dann heißt

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y < \infty$$

die Operatornorm von T (bzgl. $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$)

Bem

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_X} T(x) \right\|_Y = \sup_{x \neq 0} \Big\| T \Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|_X}}_{=: \tilde{x}} \Big) \Big\|_Y, \quad \|\tilde{x}\|_X = 1$$

$$= \sup_{\|\tilde{x}\|_X = 1} \|T(\tilde{x})\|_Y$$

Satz 1.47 Seien X, Y normierte Räume.

Dann ist

$$L(X, Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ linear und stetig}\}$$

ein Vektorraum und die Operatornorm

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$ ist eine Norm auf $L(X, Y)$ mit $\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X \; \forall x \in X$.

Beweis (Übung)

(42)

Bsp Sei

$$C([a,b]) := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

Dann ist $\|f\|_\infty := \sup\{ |f(x)| \mid x \in [a,b] \}$

eine Norm auf $C([a,b])$ (Aua 1).

Die Abbildung $I : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ist linear und es gilt

$$\left.\begin{aligned} |I(f)| &= \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \\ &\le \int_a^b \|f\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty (b-a) \end{aligned}\right\} (*)$$

Also $\sup\limits_{\substack{f \neq 0 \\ f \in C([a,b])}} \frac{|I(f)|}{\|f\|_\infty} \le (b-a)$

und für $f(x) = 1$ gilt „=" in (*) also

$$\|I\| = \sup_{\substack{f \in C([a,b]) \\ f \neq 0}} \frac{|I(f)|}{\|f\|_\infty} = b-a$$

Sei $\alpha(f) = \frac{|I(f)|}{\|f\|_\infty}$

$$\sup_{f \neq 0} \alpha(f)$$

$$\alpha(f) \le b-a \qquad \forall f.$$

also ist $b-a$ eine obere Schranke.

Ist $b-a$ die kleinste — " — ?

Ang $c < b-a$, dann kann nicht gelten

$$\alpha(f) \le c \qquad \forall f,$$

dann für $f = \text{const}$ gilt

$$\alpha(f) = b-a.$$