(43)

Bsp Sei $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Dann gilt

$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$ ist stetig

also ist $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Ferner gilt bzg. der Euklid. Norm in $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m$:

Nach Satz 1.45 ist $\|A\| < \infty$

und es gilt

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\| \le \sqrt{nm} \max |a_{ij}|$$

(siehe Forster)

<u>Tatsächlich gilt</u>

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle A^T A x, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

$(*) \le \lambda_{max}(A^T A)$

Und in $(*)$ gilt „=" für geeignetes x.

Also

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}.$$

„Spektralnorm der Matrix A"

Eigenwert λ der Matrix M zum Eigenvektor $x \neq 0$ $\Big\}$: $Mx = \lambda x$

$(*)$ <u>Rayleigh-Quotient</u> für die

sym. positiv-semidef. Matrix $A^T A$.

Beweis verwendet Diagonalisierung von $A^T A$.

3. Kompaktheit

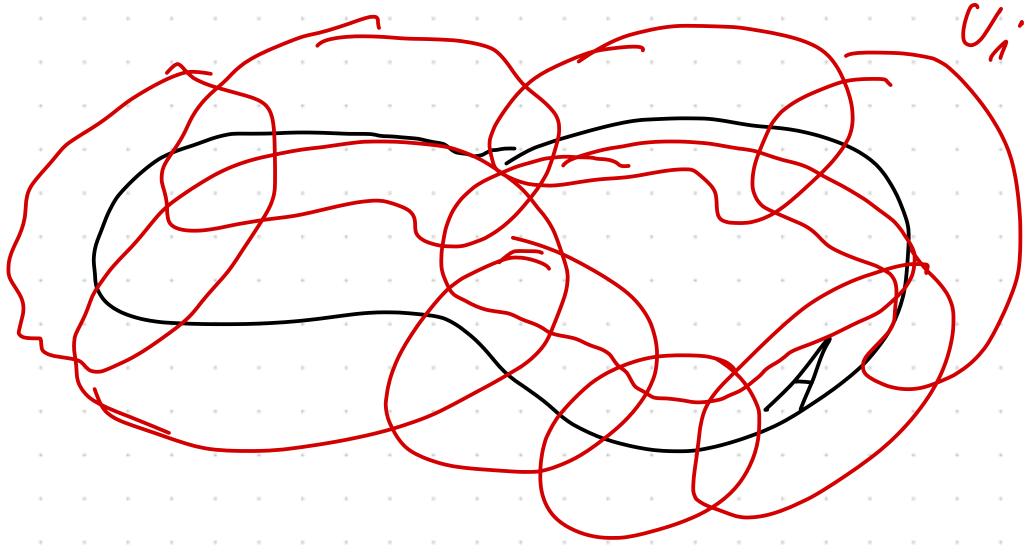
Def 3.1 Sei X ein metr. Raum und $A \subseteq X$. Eine offene Überdeckung von A ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen $U_i \subseteq X$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

Dabei ist I eine bel. Indexmenge.

Def. 3.2 Sei X ein metr. Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A kompakt, wenn zu jeder offen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung auswählen können, d.h. ex. $i_1, \dots, i_n \in I$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$



Achtung: Es reicht nicht aus, wenn eine endliche Überdeckung ex. Man muß zu jeder Überdeckung eine endliche auswählen können.

(45)

Satz 3.3 Sei X ein metr. Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in X$. Dann ist

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \text{ kompakt.}$$

Beweis Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung (oÜ) von A. Da $a \in A$ ex. $i^* \in I$ mit $a \in U_{i^*}$.

Da $x_n \to a$ ex. zu der Umgebung U_{i^*} von a ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in U_{i^*} \qquad \forall n \geq n_0.$$

Ferner ex. zu jedem $x_n \in A$ ein $i_n \in I$ mit $x_n \in U_{i_n}$.

Nun gilt

$$A \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_{n_0-1}} \cup U_{i^*}.$$

Also ist A kompakt. ∎

Bem Der Satz gilt i. A. nicht für $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Bsp $X = \mathbb{R}$, $x_n = \frac{1}{n}$

sei $U_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$,

dann gilt $x_n = \frac{1}{n} \in U_n$ und U_n offen. D.h. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist o.Ü. von

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Aber es gilt

$$x_m \notin U_n \quad \text{für } m \neq n.$$

D.h. wir können keine U_n „weglassen".

Also A ist nicht kompakt.

Bsp Sei $X = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{N}$, dann ist A abgeschl. und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$U_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$$

ist o.Ü. von $\mathbb{N}$.

Aber wir können keine endl. Teilü. auswählen.

$\Rightarrow$ A nicht kompakt

Bsp $X = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R}$.

A ist nicht kompakt:

$(U_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ $\quad U_z = (z-1, z+1)$

Satz 3.4 Sei X ein metr. Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A abgeschlossen und beschränkt.

Beweis „A beschr." Falls $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei $A \neq \emptyset$ und $a \in A$ bel. fest. Nun $x \in A$

$d(x,a) < \infty$, also

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_n(a).$$

Somit ist $(B_n(a))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ eine o.Ü. von A. Da A kompakt ex. $n_1, \dots, n_L \in \mathbb{N}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{L} B_{n_k}(a) = B_{n^*}(a)$$

mit $n^* = \max\{n_1, \dots, n_L\}$.

Also gilt $\operatorname{diam}(A) \leq 2n^*$.

„A abgeschl": Wir zeigen: $X \setminus A$ offen.

Sei $a \in X \setminus A$ bel. Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ setze

$$U_n := \{x \in X \mid d(x,a) > \tfrac{1}{n}\} = X \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(a)}.$$

Dann ist U_n offen und es gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} U_n = X \setminus \{a\} \supseteq A$$

D.h. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ist o.Ü. von A.

Also ex $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$A \subseteq U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} = U_{n^*}$$

mit $n^* = \max\{n_1, \dots, n_k\}$.

Somit gilt

$$B_{\frac{1}{n^*}}(a) \subseteq X \setminus U_{n^*} \subseteq X \setminus A.$$

Also ist $X \setminus A$ offen und A abgeschlossen. ☐

kurz: $\boxed{\text{Kompakt} \Rightarrow \text{abgeschl. \& beschränkt.}}$

Corollar 3.5 Jede konv. Folge in einem metr. Raum ist beschränkt.

Beweis Satz 3.3 + Satz 3.4 ☐

48

Satz 3.6 Sei X ein metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist auch A kompakt.

Lemma 3.7 Seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k \leq b_k$, $k = 1, \dots, n$. Dann ist der abgeschlossene Quader

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k \ \forall k\}$$
$$= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

kompakt in $\mathbb{R}^n$.

Satz 3.8 (Heine-Borel)

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$A \text{ kompakt} \Longleftrightarrow \begin{cases} A \text{ abgeschl. und} \\ A \text{ beschränkt.} \end{cases}$$

Beweis „$\Rightarrow$" siehe Satz 3.4.

„$\Leftarrow$": Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschl. und beschränkt. Dann gilt für einen genügend großen Quader Q $A \subseteq Q$ (da A beschr.). Nach Lemma 3.7 ist Q kompakt und nach Satz 3.6 A kompakt (da A abgeschl.). ∎

(49)

<u>Bemerkung</u> Der Satz von Heine-Borel gilt <u>nicht</u> in bel. metr. Räumen. Insbesondere nicht in ∞-dim. Vektorräumen.

Tatsächlich gilt für $A = \overline{B_1(0)} = \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$ in Vektorraum V:

$$A = \overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim(V) < \infty.$$

$\Rightarrow$ <u>Funktionalanalysis</u>

(<u>Ausweg</u>: Finde andere Top. auf V, in der $\overline{B_1(0)}$ kompakt ist...)