(50) Erinnerung

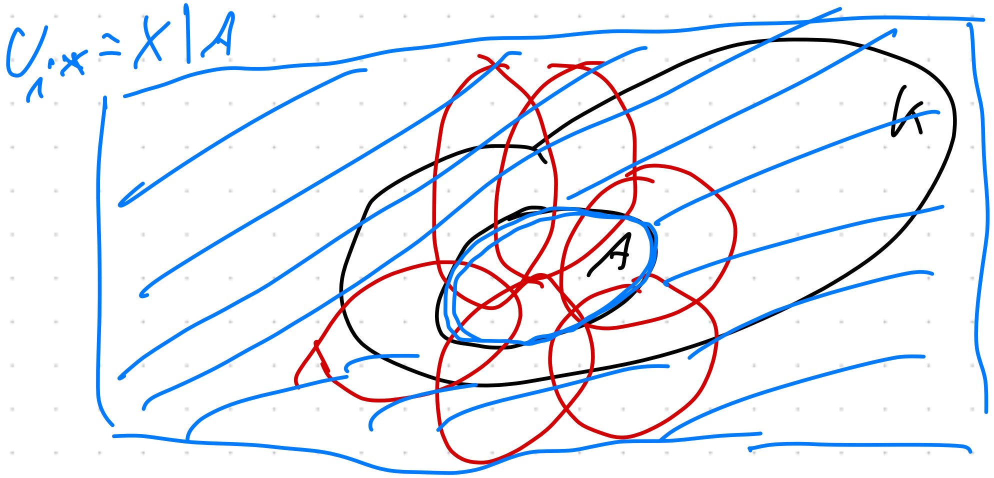
In jedem metr. Raum gilt: (Satz 3.4)

A kompakt $\Rightarrow$ A ist $\begin{cases} \text{abgeschlossen \&} \\ \text{beschränkt} \end{cases}$

In $\mathbb{R}^n$ gilt: (Satz v. Heine-Borel)

A kompakt $\Leftrightarrow$ A ist $\begin{cases} \text{abgeschl. \&} \\ \text{beschränkt} \end{cases}$

Satz 3.6 Sei X ein metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschl.. Dann ist A kompakt.



Beweis: Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Da A abgeschlossen ist, ist $X \setminus A$ offen - setze $U_{i^*} = X \setminus A$ (für $i^* \notin I$).
Dann ist

$(U_i)_{i \in I \cup \{i^*\}}$

eine o.Ü. von K. Also ex $i_1, \dots, i_n \in I$ mit

$K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup U_{i^*}$.

Da $A \subseteq K$ und $A \cap U_{i^*} = \emptyset$ gilt

$A \subseteq K \setminus U_{i^*} \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

Also ist A kompakt. $\boxtimes$

(51) <u>Lemma 3.7</u> Seien $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \le b_k$, $k = 1, \dots, n$.

Dann ist der abgeschlossene Quader

$$Q = \mathop{\Large\times}_{k=1}^{n} [a_k, b_k] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$= \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k \le x_k \le b_k,\ k = 1, \dots, n \}$$

kompakt in $\mathbb{R}^n$.

<u>Beweis:</u> Sei $(U_i)_{i \in J}$ offene Überdeckung von Q.

<u>Ang:</u> Q kann <u>nicht</u> durch endlich viele U_i überdeckt werden.

<u>Idee:</u> Konstruiere eine Folge von abgeschl. Teilquadern

$$Q = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots$$

mit den Eigenschaften $(\forall k)$

a) Q_k kann nicht durch endl. viele U_i überdeckt werden

b) $\operatorname{diam}(Q_k) = 2^{-k} \operatorname{diam}(Q)$.

Sei $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine solche Folge.

Dann ist Q_k eine Schachtelung im Sinne von Satz 1.31.

Also ex. ein Punkt a mit $a \in Q_k \ \forall k \in \mathbb{N}$, insbes. $a \in Q$.

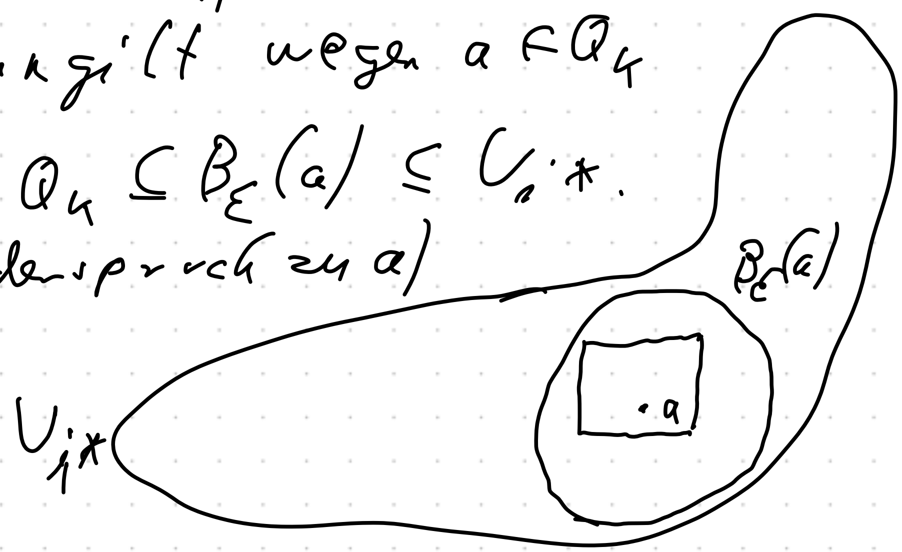
Somit ex. mind. ein i^* mit $a \in U_{i^*}$. Da U_{i^*} offen ist, ex. $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U_{i^*}$.

Sei nun k groß genug, sodass $\operatorname{diam}(Q_k) < \varepsilon$.

Dann gilt wegen $a \in Q_k$

$$Q_k \subseteq B_\varepsilon(a) \subseteq U_{i^*}.$$

↯ Widerspruch zu a)



Also ist Q kompakt.

<u>Jetzt</u>: Konstruktion der Q_k.

Sei $Q_0 = Q$. Azg. $Q_0 \supseteq \dots \supseteq Q_k$ mit a) und b) sind schon konstruiert. Dann gilt

$$Q_k = I_1 \times \dots \times I_n$$

für abgeschl. Intervalle I_i. Halbiere jedes I_i:

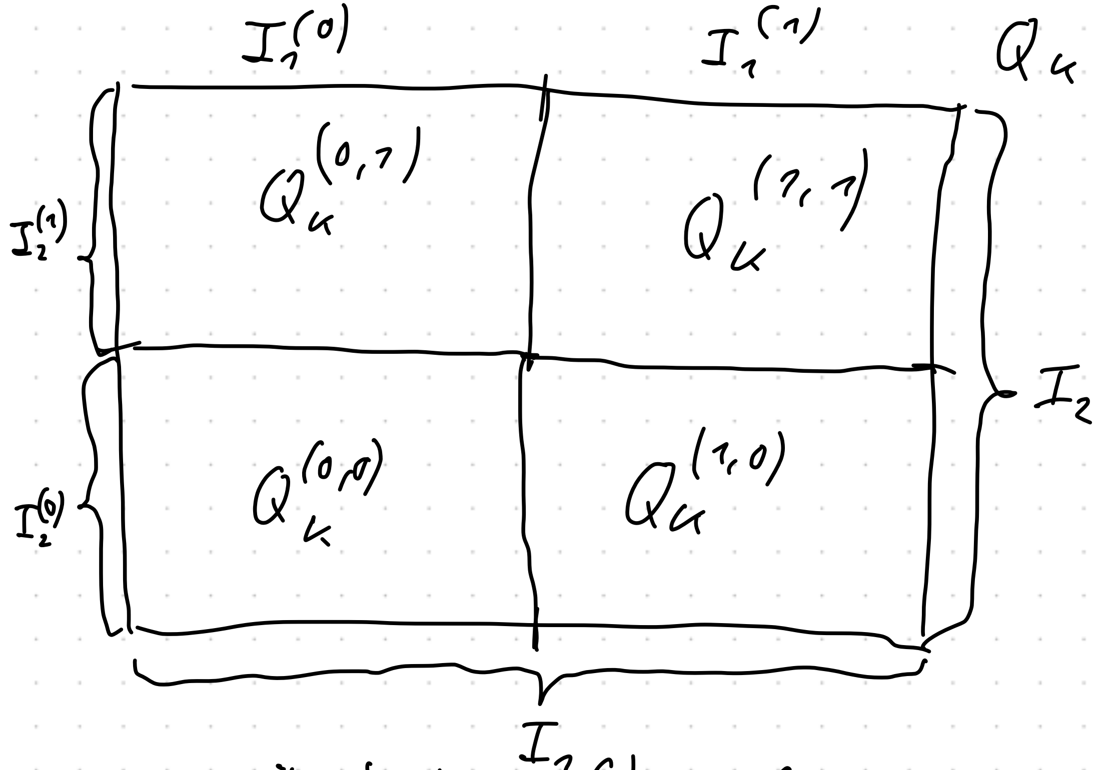
$$I_i = I_i^{(0)} \cup I_i^{(1)}$$

mit $I_i^{(0)}, I_i^{(1)}$ abgeschlossen. Setze nun für $s \in \{0,1\}^n$

$$Q_k^{(s)} = I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}$$

Dann lässt sich Q_k zerlegen in

$$Q_k = \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} Q_k^{(s)}$$



und für jedes $Q_k^{(s)}$ gilt

$$\operatorname{diam}(Q_k^{(s)}) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(Q_k) = 2^{-(k+1)} \operatorname{diam}(Q)$$

Da Q_k nicht von endlich vielen U_i überdeckt wird, muß das auch für mind. ein $Q_k^{(s)}$ gelten! (<u>Da es nur 2^n Stück gibt</u>.) Wähle dieses $Q_k^{(s)}$ als Q_{k+1}. Dann gilt für Q_{k+1} a) und b). ☒

(53) Jetzt: Kompaktheit & Stetigkeit

Satz 3.9 Seien X und Y metr. Räume, $f: X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist auch $f(K) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis: Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$. Dann ist auch $V_i := f^{-1}(U_i) \subseteq X$ offen. Ferner folgt aus

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

direkt

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in I} V_i.$$

D.h. $(V_i)_{i \in I}$ ist o.Ü. von K.
Da kompakt, ex. $i_1, \dots, i_n \in I$ mit

$$K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$$

und somit

$$f(K) \subseteq f(V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}) = f(V_{i_1}) \cup \dots \cup f(V_{i_n})$$
$$= U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

$\square$

Korollar 3.10 Seien X und Y homöomorphe metr. Räume und $\Phi: X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann gilt

$M \subseteq X$ kompakt $\iff$ $\Phi(M) \subseteq Y$ kompakt.

Bsp: Wir betrachten die metr. Räume $X = [0,1]$ und $Y = (0,1)$ jeweils mit $d(x,y) = |x-y|$.
Dann ist X kompakt.
Aber $Y = (0,1)$ ist nicht kompakt! ($(U_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, $U_n = (\frac{1}{n}, 1)$)
Also sind X und Y nicht homöomorph!

54

Bemerkung:

Ein metr. Raum (X,d) heißt kompakt, wenn X in (X,d) kompakt ist.

Bsp Sei $X = (0,1)$ mit Metrik $d(x,y) = |x-y|$. Dann ist X nicht kompakt in (X,d). Aber X ist beschränkt und X ist abgeschlossen in (X,d).

Achtung: Der Satz von Heine-Borel gilt nur für ganz $\mathbb{R}^n$ und nicht für Teilräume (d.h. Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ als metr. Raum).

Lemma 3.11 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

Dann gilt

$$\sup(A) \in A \text{ und } \inf(A) \in A$$

Beweis

Nach Satz 3.4 folgt aus Kompaktheit Beschränktheit und Abgeschlossenheit. Also:

A beschränkt $\Rightarrow \sup(A) \in \mathbb{R}$

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_k \to \sup(A)$.

A abgeschl. $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \sup(A) \in A$.

(inf analog). ∎

55

Satz 3.12 Sei X ein kompakter metr. Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an, d.h. ex. $x_{min}, x_{max} \in X$ mit

$$f(x_{min}) = \inf\{f(x) \mid x \in X\} = \inf(f(X)),$$
$$f(x_{max}) = \sup\{f(x) \mid x \in X\} = \sup(f(X)).$$

Beweis

Nach Satz 3.9 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

Nach Lemma 3.11 gilt dann

$\inf(f(X)) \in f(X)$ und

$\sup(f(X)) \in f(X)$. ☑

Anwendung:

Sei X metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Minimierungsproblem

Finde $x \in K$: $f(x) \leq f(y)$ $\forall y \in K$

eine Lösung $x \in K$.