

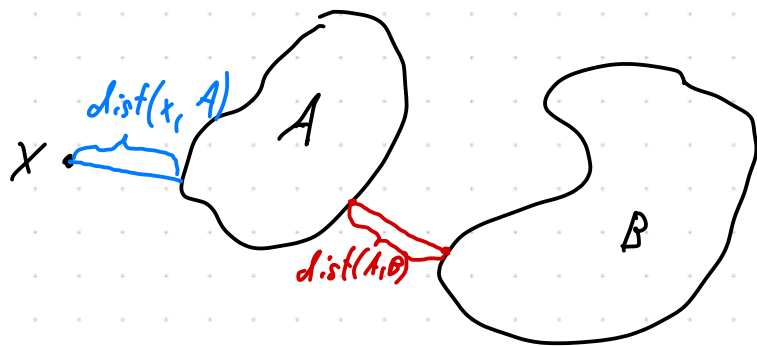
(56)

Def 3.13 Sei (X, d) metr. Raum, $A, B \subseteq X$ nicht leer und $x \in X$. Def. dann

$$\text{dist}(x, A) := \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$$

und

$$\text{dist}(A, B) := \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$



Satz 3.14 Sei X metr. Raum und $A \subseteq X, A \neq \emptyset$.

Dann ist

$$\text{dist}(\cdot, A): X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{dist}(x, A)$$

stetig.

Beweis Sei $a \in A$ bel., dann gilt

$$0 \leq \text{dist}(x, A) \leq d(x, a) \quad \forall x \in X$$

$$\text{also } \text{dist}(x, A) \in \mathbb{R} \left(\begin{array}{l} \text{also } \text{dist}(\cdot, A): X \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{wohl def.} \end{array} \right)$$

Sei nun $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ bel. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{dist}(y, A) &= \inf \{d(y, a) \mid a \in A\} \\ &\leq \inf \{d(y, x) + d(x, a) \mid a \in A\} \\ &= d(y, x) + \inf \{d(x, a) \mid a \in A\} \\ &= d(y, x) + \text{dist}(x, A), \end{aligned}$$

also

$$|\text{dist}(y, A) - \text{dist}(x, A)| \leq d(y, x) < \varepsilon$$

für $d(y, x) < \delta := \varepsilon$. □



$\text{dist}(A, B) = 0$ ist möglich.

(57)

Korollar 3.15 Sei X metr. Raum, $A, K \subseteq X$ nicht leer, A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$. Dann gilt $\text{dist}(A, K) > 0$.

Beweis Betrachte $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{dist}(x, A)$.

Dann ist f stetig und nimmt auf der kompakten Menge K Minimum an.

D.h. es ex. $x_{\min} \in K$ mit

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) &= \text{dist}(x_{\min}, A) = \inf \{ \text{dist}(x, A) \mid x \in K \} \\ &= \inf \{ \underbrace{\inf \{ d(x, a) \mid a \in A \}}_{\text{dist}(x, A)} \mid x \in K \} \\ &= \inf \{ d(x, a) \mid a \in A, x \in K \} \\ &= \text{dist}(K, A). \end{aligned}$$

Wegen $A \cap K = \emptyset$ gilt $x_{\min} \in X \setminus A$. Also ex. $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_{\min}) \subseteq X \setminus A$, da A abgeschl.

bzw. $X \setminus A$ offen ist. Somit gilt

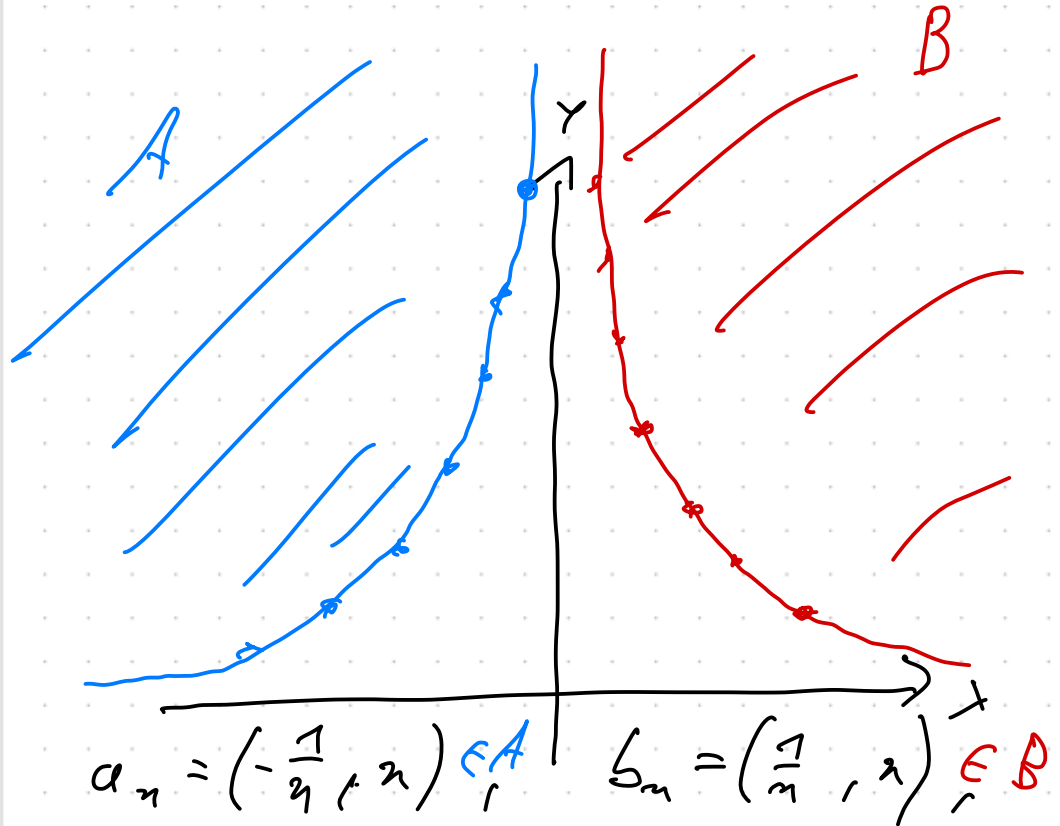
$$d(x_{\min}, a) \geq \varepsilon \quad \forall a \in A, \text{ also } \text{dist}(x_{\min}, A) \geq \varepsilon > 0. \quad \square$$

1. A. muB mind. eine Menge kompakt sein!

$$\text{Sei } A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y \geq \frac{1}{|x|} \}$$

$$\text{und } B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \geq \frac{1}{|x|} \}.$$

Dann gilt: $A, B \neq \emptyset$, A, B abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$ und $\text{dist}(A, B) = 0$.



$$a_n = \left(-\frac{1}{n}, n\right) \in A, \quad b_n = \left(\frac{1}{n}, n\right) \in B$$

dann $d(a_n, b_n) = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(58) Satz 3.16 (Bolzano-Weierstraß)

Sei X ein metr. Raum, $K \subseteq X$ kompakt

und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K , d.h.

$x_n \in K, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ex. eine konvergente

Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \in K.$$

Beweis

Ang. keine TF von (x_n) konvergiert gegen ein $a \in K$. Dann ex. zu jedem $a \in K$ eine offene Umgebung U_a von a , in der höchstens endlich viele Folgenglieder x_n liegen. Nungilt

$$K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_a,$$

d.h. $(U_a)_{a \in K}$ ist offene Überdeckung

von K . Da K kompakt, ex. $a_1, \dots, a_p \in K$ mit

$$K \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_p}.$$

Somit kann K nur endlich viele x_n enthalten. $\square$

Korollar 3.17 Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis Ist (x_k) beschränkt, dann liegt (x_k) in einem genügend großen Quader Q . Nach Lemma 3.7 ist Q kompakt. Also ex. nach Satz 3.16 eine konvergente Teilfolge. $\square$

(59)

Bsp: (Anwendung von Bolzano-Weierstraß)

Alternativer Beweis von Satz 3.12:

Sei (x_n) eine Minimalfolge von f , d.h.,
Folge in X mit

$$f(x_n) \rightarrow \inf \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Da X kompakt ex. TF $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$
mit $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \in X$.Da f stetig ist gilt

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(a) = \inf \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Korollar 3.18 Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
und Konvex, d.h. erhalte für alle Folge (x_k)
in $\mathbb{R}^n$:

$$\|x_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty.$$

Dann ex. $x_{\min} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(x_{\min}) = \inf \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Beweis Sei (x_k) eine Minimalfolge für f .Dann ist (x_k) beschränkt!
$$\left(\text{Andernfalls ex. TF } (x_{k_\ell}) \text{ mit} \right. \\ \left. \|x_{k_\ell}\| \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \infty \text{ und } f(x_{k_\ell}) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \infty \right).$$
Nun ex. konv. TF (x_{k_ℓ}) mit
 $x_{k_\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}^n$ und, da f stetig,

$$f(x_{k_\ell}) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} f(a) = \inf \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

□

(60)

Def 3.19 Seien X und Y metr.

Räume. Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$

heißt gleichmäßig stetig,

wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \\ \forall x, y \in X$$

Bemerkung Es gilt immer:

f glm. stetig $\Rightarrow f$ stetig

" $\Leftarrow$ " gilt i. A. nicht!

Beispiel $\rightarrow$ A 9 I.

Aber es gilt:

Satz 3.20 Seien X, Y metr. Räume
und X kompakt. Dann ist jede
stetige Abb. $f: X \rightarrow Y$ auch
glm. stetig.