66

Def 4.3 Sei $f: I \to \mathbb{R}^n$ eine stetig diff.bare Kurve. Dann heißt $t \in I$ ein <u>singulärer Punkt</u> von f, wenn $f'(t) = 0$. f heißt <u>regulär</u> (bzw. <u>nicht-singulär</u>), wenn sie keinen singulären Punkte hat, d.h., wenn $f'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Bsp a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$

$f(1) = f(-1) = (0, 0)$

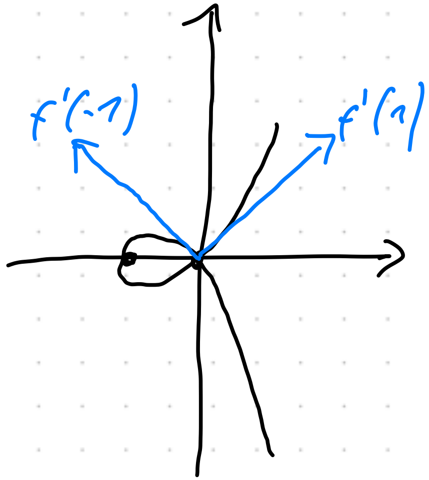
$f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$

$f'(1) = (2, 2)$

$f'(-1) = (-2, 2)$

f schneidet sich selbst in $f(1) = f(-1) = (0,0)$

$f'(t) \neq (0,0) \ \forall t \in \mathbb{R}$, d.h. <u>$f$ ist regulär</u>.



b) Neilsche Parabel

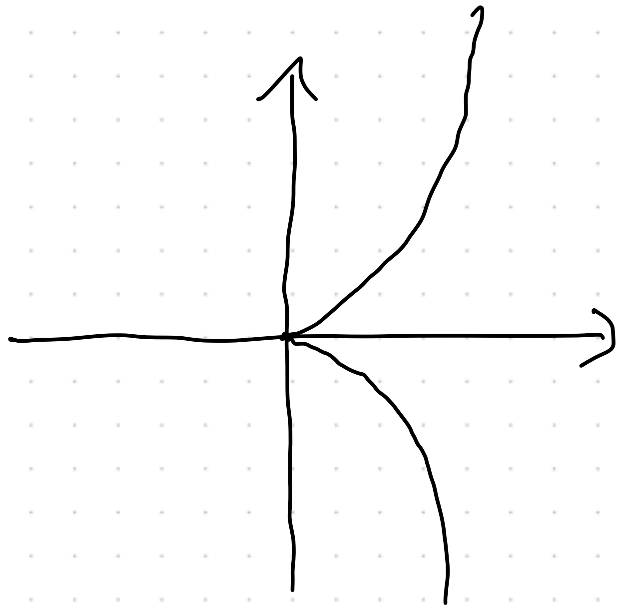
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = (t^2, t^3)$

$f'(t) = (2t, 3t^2)$

$f'(0) = (0, 0)$

d.h. 0 ist <u>singulärer Punkt</u>



(67) Schnittwinkel

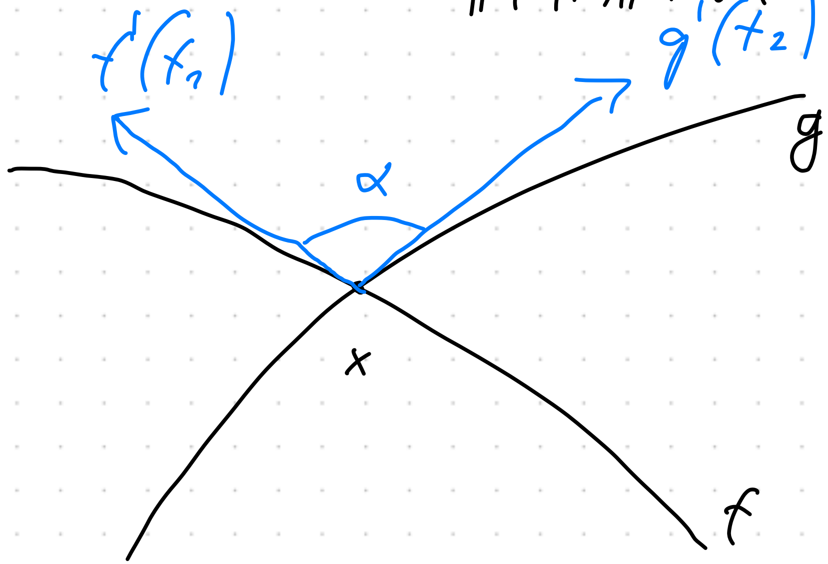
Seien $f: I_1 \to \mathbb{R}^n$, $g: I_2 \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurve.

Ang f und g schneiden sich in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, dann ex. $t_1 \in I_1$ und $t_2 \in I_2$ mit

$$f(t_1) = x = g(t_2)$$

Für den Winkel zwischen den Tangentialvektoren gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle f'(t_1), g'(t_2) \rangle}{\|f'(t_1)\| \cdot \|g'(t_2)\|}.$$

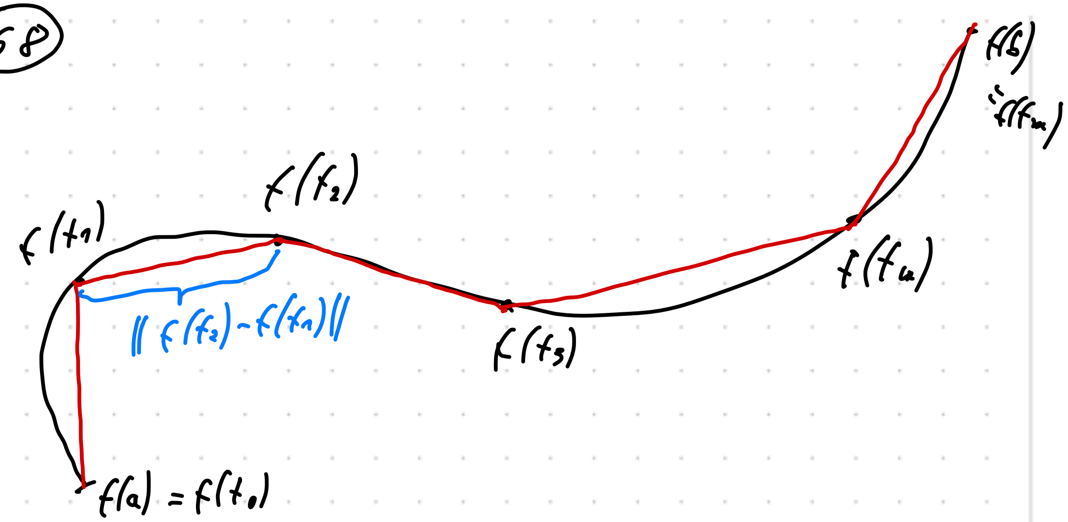


Länge einer Kurve

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Gesucht: Länge der Kurve

Zunächst approximieren wir die Kurve durch einen Polygonzug:



Sei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ ein Gitter auf $[a,b]$.

Der Polygonzug verbindet jeweils $f(t_{k-1})$ mit $f(t_k)$ für $k = 1, \dots, m$.

Die Länge des Polygonzugs ist:

$$p_f(t_0,\dots,t_m) := \sum_{k=1}^{m} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

__Idee__: Betrachte den Grenzwert für feiner werdende Unterteilungen.

__Def 4.4__ Eine Kurve $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt __rektifizierbar__ mit __Länge $L(f) \in \mathbb{R}$__, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes Gitter $a = t_0 < \dots < t_m = b$ mit Feinheit $< \delta$ (d. h. $|t_k - t_{k-1}| < \delta \ \forall k \in \{1,\dots,m\}$) gilt

$$|p_f(t_0,\dots,t_m) - L(f)| < \varepsilon.$$

__Satz 4.5__ Jede stetig diff.bare Kurve $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist __rektifizierbar__ und für ihre Länge $L(f)$ gilt

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\,dt.$$

__Beweis__ (siehe Forster §4, Satz 1).

__Beweisidee__

$$p_f(t_0,\dots,t_m) = \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\| (t_k - t_{k-1})$$

$$\approx \sum_{k=1}^{m} \|f'(t_k)\| \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{<\delta} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int_a^b \|f'(t)\|\,dt.$$

(59) **Bsp**

a) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig diff.bare Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. $\|f'(t)\| = V$ $\forall t \in [a,b]$. Dann gilt

$$\underbrace{L(f)}_{\text{zurückgelegte Weg}} = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b V \, dt = \underbrace{V}_{\text{Geschwindigkeit}} \underbrace{(b-a)}_{\text{verstrichene Zeit}}$$

b) Sei $f:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r > 0$

$$f(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$$

Dann beschreibt f einen Kreis mit Radius r und für den Umfang U gilt $U = L(f)$.

$$f'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t)}$$

$$= r\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = r$$

$$U = L(f) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\|f'(t)\|}_{=r} dt = 2\pi r.$$

70 Parametertransformationen

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ eine Kurve, $[\alpha,\beta]$ ein weiteres Intervall und $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ bijektiv und stetig. Dann ist auch

$$g:=f\circ\phi:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

eine Kurve. Man sagt:

ϕ eine <u>Parametertransformation</u>

und g ist die mittels ϕ transformierte Variante von f. Sind ϕ und ϕ^{-1} stetig diff.bar, so heißt ϕ eine <u>C^1-Parametertransformation</u>.

<u>Bsp</u>: Sei $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(t)=(\cos(t),\sin(t))$ und $[\alpha,\beta]=[0,360]$, $\phi:[0,360]\to[0,2\pi]$

$\phi(s)=\frac{2\pi}{360}s$. Damit ist ϕ eine C^1-Transformation.

$g:[0,360]\to\mathbb{R}^2$,

$g(s)=(f\circ\phi)(s)=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{360}s\right),\sin\left(\frac{2\pi}{360}s\right)\right)$

<u>Bemerkung</u>

a) Die Bilder von f und g sind identisch

$$\{f(t)\mid t\in[a,b]\}=\{(f\circ\phi)(s)=g(s)\mid s\in[\alpha,\beta]\}$$

da ϕ bijektiv ist.

b) Da ϕ bijektiv und stetig ist, gilt entweder

- ϕ ist streng monoton wachsend, dann heißt ϕ <u>orientierungstreu</u>
- ϕ ist streng monoton fallend, dann heißt ϕ <u>orientierungsumkehrend</u>

c) Ist ϕ eine C^1-Transformation, so gilt $\phi'(s)\neq 0$ $\forall s\in[\alpha,\beta]$, denn $Id=\phi^{-1}\circ\phi$, also

$$1=Id'(s)=(\phi^{-1})'(\phi(s))\cdot\phi'(s)$$

D.h. ϕ orientierungstreu $\Leftrightarrow$ $\phi'(s)>0\ \forall s$

(7.1) Bemerkung

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig diff.bare Kurve und $\phi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ ein C^1-Transformation.

Dann gilt für $s \in [\alpha,\beta]$ und $t \in [a,b]$, $t = \phi(s)$ und $g = f \circ \phi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$:

$$g'(s) = (f\circ\phi)'(s) = f'(\phi(s))\phi'(s) = f'(t)\phi'(s)$$

a) Richtung

1. Fall orientierungstreu, d.h. $\phi'(s) > 0$

$$\frac{g'(s)}{\|g'(s)\|} = \frac{f'(t)\phi'(s)}{\|f'(t)\phi'(s)\|} = \frac{f'(t)\,\phi'(s)}{\|f'(t)\|\cdot|\phi'(s)|} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

2. Fall $\phi'(s) < 0$

$$\frac{g'(s)}{\|g'(s)\|} = \frac{f'(t)\phi'(s)}{\|f'(t)\phi'(s)\|} = \frac{f'(t)\,\phi'(s)}{\|f'(t)\|\cdot|\phi'(s)|} = -\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

b) Die Transformation ist längentreu, d.h. $L(f) = L(g)$ (Übung)

c) Die Transformation ist winkeltreu:

$\tilde{f}: [\tilde{a},\tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar.

$\tilde{\phi}: [\tilde{\alpha},\tilde{\beta}] \to [\tilde{a},\tilde{b}]$

C^1-Transformation

Ang

$$f(t) = \tilde{f}(\tilde{t}),$$

$g(s) = \tilde{g}(\tilde{s})$ mit

$\tilde{g} = \tilde{f} \circ \tilde{\phi}$

$$\frac{\langle f'(t), \tilde{f}'(\tilde{t})\rangle}{\|f'(t)\|\cdot\|\tilde{f}'(\tilde{t})\|} = \frac{\langle g'(s), \tilde{g}'(\tilde{s})\rangle}{\|g'(s)\|\cdot\|\tilde{g}'(\tilde{s})\|}$$

wenn ϕ und $\tilde{\phi}$ orientierungstreu.