72 5 Partielle Ableitungen

Jetzt: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

Graph von f:

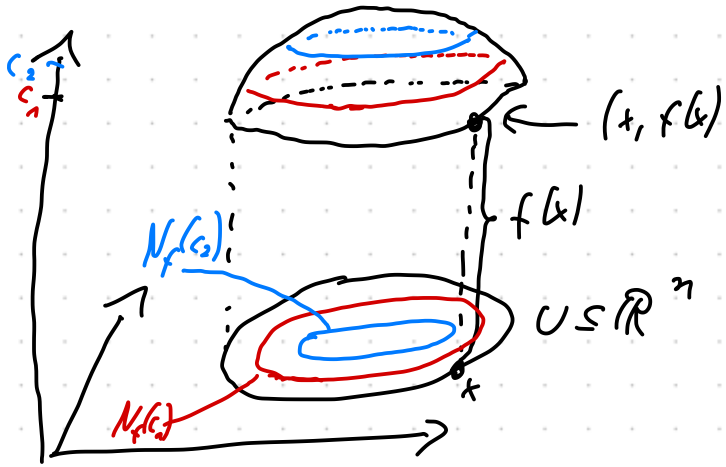
$$\Gamma_f := \{ (\underset{\in \mathbb{R}^n}{x}, \underset{\in \mathbb{R}}{y}) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(x) \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

z.B. $n = 2$ Γ_f ist eine Fläche in $\mathbb{R}^3$

Niveaumengen (Level-set)

$$N_f(c) := \{ x \in U \mid f(x) = c \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

z.B. $n = 2$ $N_f(c) \,\hat{=}\,$ Höhenlinie



Im Folgenden sei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor, d.h.

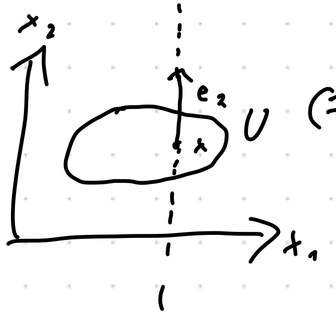
$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Def 5.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$. Für $x \in U$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ heißt f partiell differenzierbar am Punkt x bzgl. der i-ten Koordinatenrichtung, falls

$$D_i f(x) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. $D_i f(x)$ heißt die i-te partielle Ableitung von f in x.

Bem



$D_i f(x)$ ex. $\iff$ $t \mapsto g(t) = f(x + t e_i)$, $g'(0)$ existiert und $D_i f(x) = g'(0)$

73 Alternative Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := D_i f(x)$$

Def 5.2 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$.
f heißt part. diff.bar in $x \in U$, wenn
$D_i f(x)$ für $i = 1, \dots, n$ ex..
f heißt part. diff.bar, wenn
$D_i f(x)$ für alle $x \in U$ und $i = 1, \dots, n$ ex..

Bsp a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x_1^3 x_2^2 + \sin(x_1) x_2 + \cos(x_2) x_1 + x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = D_1 f(x) = 3x_1^2 x_2^2 + \cos(x_1) x_2 + \cos(x_2) + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) D_2 f(x) = 2x_1^3 x_2 + \sin(x_1) - \sin(x_2) x_1$$

b) $r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad n > 1$

$$r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$N_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, r(x) = \|x\| = c\} \quad c\text{-Sphäre}$$

Sei $x \neq 0$, dann

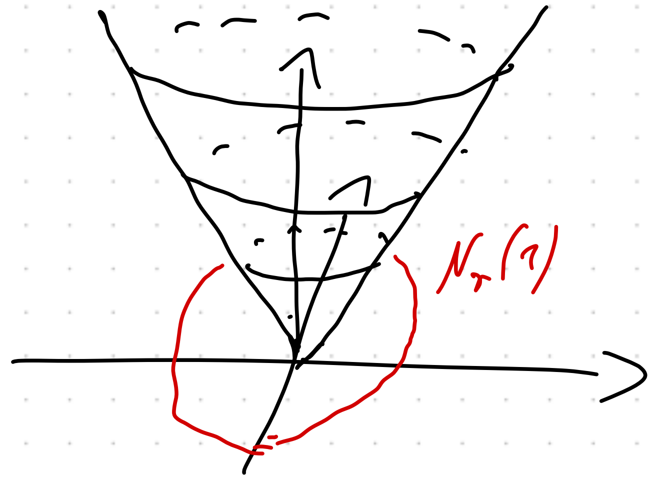
$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = D_i r(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{r(x)}$$

Sei $x = 0$ und $i \in \{1, \dots, n\}$, dann ist

$$t \mapsto r(x + te_i) = \sqrt{t^2} = |t|$$

nicht diff.bar in 0, d.h. $D_i r(0)$ ex. nicht

r ist nicht part. diff.bar in 0.



(7.4)

c) $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_i f(x) = \frac{1}{2} 2x_i = x_i$

d) Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\underline{n>1}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{\|x\|^n} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(Ohne Beweis) Dann ist f in $x \neq 0$ part. diff. bar.

Für $x=0$ und $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

D.h. f ist part. diff. bar in $x=0$

mit $D_i f(0) = 0$.

$\Rightarrow$ f ist part. diff. bar $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$

Sei nun $a_k = \left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\mathbb{1} \in \mathbb{R}^n$

mit $\mathbb{1} = (1,\ldots,1)$. Dann gilt

$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \in \mathbb{R}^n$ und

$$f(a_k) = \left(\frac{1}{k}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n\left(\frac{1}{k}\right)^2}^{\,n}} = \frac{1}{k^n\left(\frac{1}{k}\right)^n \sqrt{n}^{\,n}} = \frac{1}{\sqrt{n}^{\,n}}$$

$$= \underbrace{n^{-\frac{n}{2}}}_{\text{konstant}} \xrightarrow[k\to\infty]{} n^{-\frac{n}{2}} \neq f(0)$$

D.h. f ist <u>nicht stetig</u> in 0

$$\boxed{f \text{ part. diffbar} \not\Rightarrow f \text{ stetig}}$$

(75) **Def. 5.3** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ part. diff.bar.
Dann heißt der Vektor

$$\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

der Gradient von f an der Stelle x.

Bem
Ist f part. diff.bar, so ist

$$\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$$

selber eine (vektorwertige) Funktion.
∇ heißt Nabla-Operator
Aussprache: ∇f $\hat{=}$ „Nabla f" oder „Gradient f"
∇ ist ein Differentialoperator.

Def 5.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Vektorfeld ist eine Abb. $v: U \to \mathbb{R}^n$.
Jeder Punkt $x \in U$ wird auf eine Richtung $v(x) \in \mathbb{R}^n$ abgebildet.

Bem $f: U \to \mathbb{R}$ heißt auch Skalarfeld.

Bem ∇f ist ein Vektorfeld.

Def 5.5 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $v: U \to \mathbb{R}^n$ ein part. diff.bares Vektorfeld
(d.h. $v_i : U \to \mathbb{R}$ part. diff.bar, $i = 1, \dots, n$).
Dann heißt

$$\nabla \cdot v(x) := \operatorname{div} v(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

die Divergenz von v.

Bem
$\operatorname{div} v : U \longrightarrow \mathbb{R}$

div ist Differentialoperator.

(76) Bem

Seien $f: U \to \mathbb{R}$ und $v: U \to \mathbb{R}^n$ part. diff.bar, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f v_i)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i(x) + f(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \quad \forall x$$

bzw $\frac{\partial}{\partial x_i}(f v_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + f \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

also

$$\operatorname{div}(fv)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i(x) + f(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

$$= \langle \nabla f(x), v(x)\rangle + f(x)\operatorname{div} v(x)$$

bzw

$$\operatorname{div}(fv) = \langle \nabla f, v\rangle + f \operatorname{div} v.$$

Bsp

a) $r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(x) = \|x\|$

$\nabla r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $\nabla r(x) = \frac{x}{\|x\|}$

b) $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$$\operatorname{div}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|^{-1} = -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2x_i$$

$$= -\frac{x_i}{\|x\|^3}$$

$$\operatorname{div}(f)(x) = \left\langle -\frac{x}{\|x\|^3}, x\right\rangle + \frac{1}{\|x\|} n$$

$$= \frac{-\|x\|^2}{\|x\|^3} + \frac{n}{\|x\|} = \frac{n-1}{\|x\|}$$

77 **Def 5.6** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ part. diff.. Dann heißt f zweimal part diff.bar, wenn jede part. Ableitung $D_i f$ selber part. diff. bar ist. Und

$$D_i D_j f(x) =: \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(x)$$

heißt (i,j)-te part. Ableitung von f in x.

Allgemein f heißt $(k+1)$-mal part. diff.bar, wenn f k-mal part. diff. bar ist und alle part. Ableitungen der Ordnung $\leq k$ selber part. diff. bar sind.

$$\underbrace{D_{i_k} \cdots D_{i_1}}_{k\text{-te part. Ableitung}} f(x)$$

f heißt k-mal stetig part. diff.bar, wenn alle part. Ableitungen mit Ordnung $\leq k$ stetig sind.

Satz 5.7 (Schwarz) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig part. diff. bar. Dann gilt $\forall a \in U$ und $i,j \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a).$$