(82) c) Wärmeleitungsgleichung: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Gesucht $u : \underset{\text{Zeit}}{[0,T]} \times \underset{\text{Ort}}{\Omega} \to \mathbb{R}$

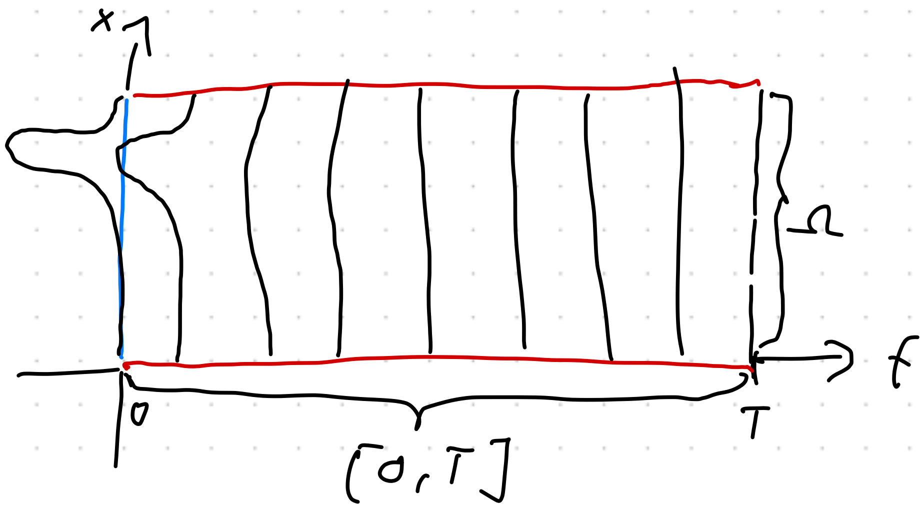
$u(t,x)$ Temperatur im Punkt x zum Zeitpunkt t

$$\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in } [0,T]\times\Omega$$

Randwerte $u(t,x) = g(t,x)$ auf $[0,T]\times\partial\Omega$

Anfangswert $u(0,x) = u_0(x)$ in Ω

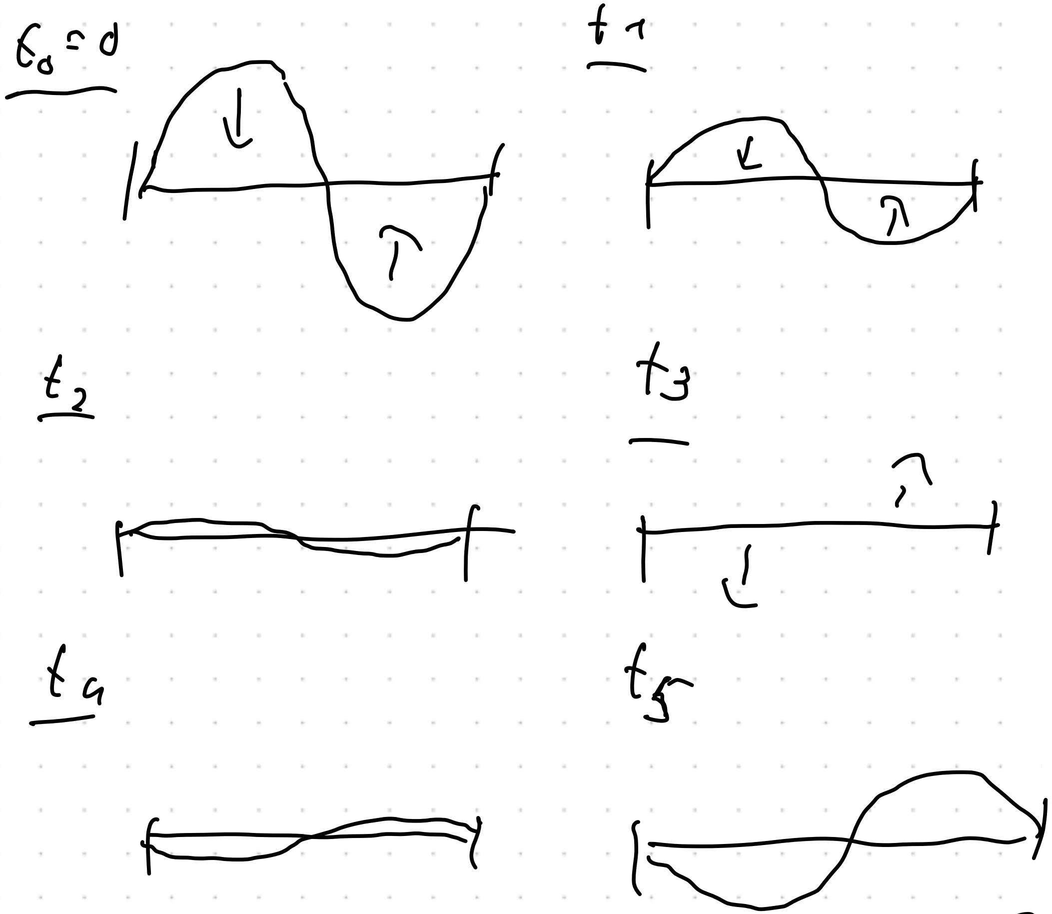


d) Wellengleichung

$u : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{in } [0,T]\times\Omega$$

+ Randwerte + Anfangswert



Mehr: VL PDEs, VL Numerik 3

(83) **Bem** Δ ist invariant unter Rotation. D.h. geht $\tilde{u}$ durch Drehung um x aus u hervor, dann gilt

$$\Delta \tilde{u}(x) = \Delta u(x)$$

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ rotationssym.,

d.h. $f(x) = \hat{f}(\|x\|)$ mit $\hat{f} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Erinnerung: Für $r(x) = \|x\|$ gilt

$$\nabla r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

Also gilt wegen $f = \hat{f} \circ r$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \hat{f}'(r(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} r(x)$$

$$\nabla f(x) = \hat{f}'(r(x)) \nabla r(x) = \hat{f}'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}.$$

Somit

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \operatorname{div}(\nabla f)(x) \\
&= \operatorname{div}\left(\hat{f}'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}\right) \\
&= \left\langle \nabla\left(\hat{f}'(\|x\|)\right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \hat{f}'(\|x\|) \operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\
&= \left\langle \hat{f}''(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \hat{f}'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|} \\
&= \hat{f}''(\|x\|) \frac{\langle x, x\rangle}{\|x\|^2} + \hat{f}'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|} \\
&= \hat{f}''(\|x\|) + \hat{f}'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|}
\end{aligned}$$

Konsequenz Sei $n > 2$ und $\hat{f}(r) = \frac{1}{r^{n-2}} = r^{2-n}$,

d.h. $f = \hat{f} \circ r$ ist

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^{n-2}} = \|x\|^{2-n}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= (2-n)(1-n)\|x\|^{-n} + (2-n)\|x\|^{1-n} \frac{n-1}{\|x\|} \\
&= (2-n)(1-n)\|x\|^{-n} - (2-n)(1-n)\|x\|^{-n} = 0
\end{aligned}$$

(84) <u>D.h</u> für $n \geq 3$ ist

$$f(x) = \|x\|^{2-n} = \frac{1}{\|x\|^{n-2}}$$

eine Lösung von

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

z.B. für <u>$n=3$</u> : $f(x) = \frac{1}{\|x\|}$

f heißt Newton-Potential

<u>Für</u> <u>$n=2$</u> gilt für $f(x) = \log(\|x\|)$

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

<u>Für</u> <u>$n=1$</u> gilt für $f(x) = |x|$

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

<u>Erinnerung</u>:

f part. diff.bar $\not\Rightarrow$ f stetig

(85) ## 6 Totale Differenzierbarkeit

Def 6.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$. f heißt (total) <u>differenzierbar</u> im Punkt $x \in U$, falls es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, sodaß in einer Umgebung von x gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi)$$

mit

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \, . \qquad (*)$$

Dabei ist φ in einer Umgebung von 0 definiert.

(Mit Landau-Symbolen: $\varphi(\xi) \in o(\|\xi\|)$)

<u>Alternativ</u>:

$$f(y) = f(x) + A(y-x) + \varphi(y-x)$$

mit $\varphi(z) \in o(\|z\|)$.

<u>Insbesondere</u>: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ fest und $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, $h \to 0$ ($\xi := hv$)

$$\frac{f(x+hv) - f(x)}{h} - Av = \frac{\varphi(vh)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$Av = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}$$

f diff.bar $\Rightarrow$ f diff.bar in Richtung v $\forall v \in \mathbb{R}^n$