(86) **Satz 6.2** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ diff.bar in $x \in U$. Dann gilt

a) f ist stetig in x.

b) f ist part. diff.bar in x mit

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = D_j f_i(x) = A_{ij}$$

wobei A die Matrix aus Def. der Diff.barkeit für $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Bem Aus b) folgt, daß A eindeutig bestimmt ist. Wir schreiben im Folgenden $\boxed{Df(x)}$ für die Matrix. $Df(x)$ heißt totales Differenzial. Damit heißt b)

$$(Df(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = D_j f_i(x).$$

Die Matrix $Df(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt Jacobi-Matrix.

Beweis a) Aus $\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ folgt insbesondere

$$\lim_{\xi \to 0} \varphi(\xi) = 0.$$ Also gilt

$$\lim_{\xi \to 0} f(x+\xi) = \lim_{\xi \to 0} \Big(f(x) + \underbrace{Df(x)\xi}_{\to 0} + \underbrace{\varphi(\xi)}_{\to 0} \Big) = f(x).$$

b) Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt für $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$

$$\frac{f_i(x+he_j) - f(x)}{h} = \left(\frac{f(x+he_j) - f(x)}{h} \right)_i$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} \left(Df(x) e_j \right)_i = (Df(x))_{ij}$$

D.h. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = (Df(x))_{ij}$. ∎

(87) **Satz 6.3** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ part. diff.bar in U und stetig part. diff.bar in $x \in U$. Dann ist f diff.bar in x.

Bem $f(x+\xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi)$

mit $\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0$

$\Leftrightarrow \forall i \begin{cases} f_i(x+\xi) = f_i(x) + A_i \xi + \varphi_i(\xi) \\ \qquad \text{ite Zeile} \\ \frac{\varphi_i(\xi)}{\|\xi\|} \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0 \end{cases}$

D.h. f diff.bar $\Leftrightarrow$ f_i diff.bar für $i = 1, \dots, m$

Beweis Nach Bem können wir oBdA $m = 1$ annehmen. Da U offen ex. $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$.

Für $\xi \in B_\delta(0)$ setze

$$z^{(k)} := x + \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i \qquad k = 0, \dots, n$$

Dann gilt

$z^{(0)} = x$, $z^{(n)} = x + \xi$

und $z^{(k)}$ und $z^{(k-1)}$ unterscheiden sich nur in der k-ten Komponente. Ferner

$\|x - z^{(k)}\| \leq \|\xi\| < \delta$, d.h. $z^{(k)} \in B_\delta(x) \subseteq U$.

Nach MWS ex. für jedes k ein $\theta_k \in [0,1]$

$$f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = D_k f(y^{(k)}) \xi_k$$

mit $y^{(k)} = z^{(k-1)} + \theta_k \xi_k e_k$. Also gilt

$$f(x+\xi) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} D_k f(y^{(k)}) \xi_k .$$

Setze nun $A_{1,k} = D_k f(x)$. Dann gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + A\xi + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(D_k f(y^{(k)}) - D_k f(x)\right) \xi_k}_{=: \varphi(\xi)}$$

(88) Zeige jetzt $\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \left(D_k f(y^{(k)}) - D_k f(x)\right) \xi_k \in o(\|\xi\|)$.

[**Erinnerung:** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle a, b \rangle \leq \|a\| \cdot \|b\|$

Und es gilt „=" genau dann, wenn $a = tb$ mit $t \geq 0$.]

$$\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \overset{\text{CS-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(D_k f(y^{(k)}) - D_k f(x)\right)^2}}_{\xrightarrow[\xi \to 0]{} 0} \frac{\|\xi\|}{\|\xi\|}$$

weil $D_k f$ stetig in x

und $y^{(k)} \xrightarrow[\xi \to 0]{} x$

Also $\varphi(\xi) \in o(\|\xi\|)$, d.h. f diff.bar in x. ☒

Korollar 6.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig part. diff., dann ist f stetig und diff.bar..

Bem Es gilt also:

$$\begin{tikzcd}
\text{stetig. part. diff.bar} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{(total) diff.bar} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{part. diff.bar} & \text{stetig}
\end{tikzcd}$$

Jedoch gilt für keinen Pfeil die Umkehrung!

89 **Satz 6.5** (Kettenregel) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$, $g: V \to \mathbb{R}^q$ mit $f(U) \subseteq V$. Sei $x \in U$ und f diff.bar in x und g diff.bar in $y = f(x)$. Dann ist $g \circ f: U \to \mathbb{R}^q$ diff.bar in x und es gilt

$$D(g\circ f)(x) = \underbrace{\underbrace{(Dg)(f(x))}_{\mathbb{R}^{k\times m}} \underbrace{Df(x)}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}}}_{\mathbb{R}^{k\times n}}.$$

Beweis Sei $y = f(x)$ und $A = Df(x)$, $B = (Dg)(f(x))$. Z.z.: $D(g\circ f)(x) = BA$. Da f und g diff.bar in x bzw. y gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi)$$

$$g(y+\eta) = g(y) + B\eta + \psi(\eta)$$

mit $\varphi(\xi) \in o(\|\xi\|)$, $\psi(\eta) \in o(\|\eta\|)$.

Setze nun

$$\eta = \eta(\xi) = f(x+\xi) - f(x) = A\xi + \varphi(\xi).$$

Dann gilt

$$\eta(\xi) \xrightarrow[\xi\to 0]{} 0$$

und

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+\xi) &= g(f(x+\xi)) = g(f(x)+\eta) = g(y+\eta)\\ &= g(y) + B\eta + \psi(\eta)\\ &= (g\circ f)(x) + BA\xi + \underbrace{B\varphi(\xi) + \psi(\eta(\xi))}\\ &= (g\circ f)(x) + BA\xi + \chi(\xi)\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\frac{\chi(\xi)}{\|\xi\|} = \underbrace{\frac{B\varphi(\xi)}{\|\xi\|}}_{\xrightarrow[\xi\to 0]{} 0} + \frac{\psi(A\xi+\varphi(\xi))}{\|\xi\|}$$

$\longrightarrow 0$

$\xi \to 0$, denn ...

(90)
$$\frac{\psi(A\xi+\varphi(\xi))}{\|\xi\|} = \frac{\psi(\eta(\xi))}{\|\eta(\xi)\|}\cdot\frac{\|\eta(\xi)\|}{\|\xi\|}$$

$$= \underbrace{\frac{\psi(\eta(\xi))}{\|\eta(\xi)\|}}\cdot\frac{\|A\xi+\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}$$

$$\le \underbrace{-\,''\,-}_{\xrightarrow[\xi\to 0]{} 0}\cdot\left(\underbrace{\frac{\|A\|\cdot\|\xi\|}{\|\xi\|}}_{=\|A\|}+\underbrace{\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\xrightarrow[\xi\to 0]{} 0}\right)\xrightarrow[\xi\to 0]{} 0.$$ ☒

Also ist $g\circ f$ diff.bar in x mit $D(g\circ f)(x) = BA$. ☒

__Korollar 6.6__ Seien $U\subseteq\mathbb{R}^n$ und $V\subseteq\mathbb{R}^m$ offen, $f: U\to\mathbb{R}^m$ und $g: V\to\mathbb{R}$ diff.bar mit $f(U)\subseteq V$. Dann ist $F=g\circ f: U\to\mathbb{R}$ diff.bar und es gilt für $y=f(x)$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(y)\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

__Beweis__ Es gilt

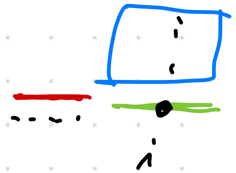
$$Df(x) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x) & \dots & D_n f_m(x)\end{pmatrix}$$

$$Dg(y) = \big(D_1 g(y) \;\dots\; D_m g(y)\big)$$

$$DF(x) = \big(D_1 F(x) \;\dots\; D_n F(x)\big)$$

Satz 6.5:

$$\underline{DF(x)} = \underline{Dg(y)}\;\underline{Df(x)}$$



$$D_i F(x) = \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(x) = \big(DF(x)\big)_{1,i}$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(y)\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$ ☒