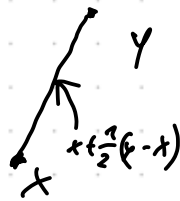


(96) Erinnerung (MWS) für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
(Integralform)

Notation Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$[x, y] := \{x + t(y-x) \mid t \in [0, 1]\}$$

die Strecke zwischen x und y .



Satz 6.11 (MWS) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diff. bar,
 $a, b \in U$ mit $[a, b] \subseteq U$, dann

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{\left(\int_0^1 Df(a + t(b-a)) dt \right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Korollar 6.12 Seien die Annahmen von
Satz 6.11 erfüllt und

$$M := \sup_{t \in [0, 1]} \|Df(a + t(b-a))\| = \sup_{z \in [a, b]} \|Df(z)\|.$$

Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$$

Beweis

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \left\| \int_0^1 Df(a + t(b-a)) \cdot (b-a) dt \right\| \\ &\stackrel{(\text{Lemma 6.10})}{\leq} \int_0^1 \|Df(a + t(b-a))\| \cdot \|b-a\| dt \\ &\leq M \|b-a\| \quad \square \end{aligned}$$

Erinnerung Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$\|f(b) - f(a)\| \leq L \|b - a\| \quad \forall b, a \in U$$

heißt Lipschitz stetig mit Lipschitz-
konstante L .

97 MWS mit Zwischenstelle.

$$\left(\begin{array}{l} \text{für } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Analysis 1}) \\ \exists \theta \in [0, 1]: f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a) \quad (*) \end{array} \right)$$

Verallgemeinerung auf $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Satz 6.13 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.-bar,
 $a, b \in U$ mit $[a, b] \subseteq U$. Dann ex. $\theta \in [0, 1]$ mit
 $f(b) - f(a) = Df(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a)$
 $= \langle Df(a + \theta(b-a)), b-a \rangle.$

Beweis Wende MWS auf $f \circ g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $g(t) = f(a + t(b-a))$ an: $\exists \theta \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= g(1) - g(0) = g'(\theta)(1-0) \\ &= g'(\theta) = Df(a + \theta(b-a)) \cdot (b-a) \\ &= \langle Df(a + \theta(b-a)), b-a \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Achtung: Der MWS in der Form $(*)$
 lässt sich nicht auf $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ verallgemeinern!

Problem Für unterschiedliche f_i
 kann es verschiedene θ_i geben.

Bsp $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, f_i(x) = x^{i+1}$
 $n > 1$

Ang $\exists \theta \in [0, 1]$ mit

$$f(1) - f(0) = Df(0 + \theta(1-0))(1-0) = Df(\theta)$$

Damit gilt für jedes i :

$$f_i(1) - f_i(0) = f_i'(\theta)$$

$$\text{d.h. } f_i'(\theta) = (i+1)\theta^i = f_i(1) - f_i(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\theta = \sqrt[i]{\frac{1}{i+1}}$$

Das kann nicht für alle i gelten.



98 7 Lokale Extrema und Taylor-Formel

Motivation Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$f \text{ hat Extrema an } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0, f''(x) > 0 \Rightarrow x \text{ Minimum}$$

Notation (Multiindices)

Ein Multiindex α ist ein n -Tupel

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n.$$

Setze

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \left(1\text{-Norm von } \alpha\right)$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Für f $|\alpha|$ -mal stetig diff. bar.
Setze dann

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Wobei

$$D_i^{\alpha_i} = \underbrace{D_i \dots D_i}_{\alpha_i\text{-mal.}}$$

Bsp a) $\alpha = (3, 0, 1)$

$$|\alpha| = 4, \quad \alpha! = 3! \cdot 0! \cdot 1! = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

$$x^\alpha = x_1^3 x_3$$

$$D^\alpha f = D_1 D_1 D_1 D_3 f$$

$$\text{4) } D_1 D_2 D_3 f = D^{(1,1,1)} f, \quad D_{11} f = D^{(2,0)} f$$

$$D_1 D_2 f = D^{(1,1)} f = D_2 D_1 f$$

(19) Lemma 7.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig diff. bar. Seien $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, x+\xi] \subseteq U$ (d.h. $x+t\xi \in U \forall t \in [0,1]$). Dann ist $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) = f(x+t\xi)$ k -mal stetig diff. bar und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x+t\xi) \xi^\alpha.$$

d.h. $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $|\alpha|=k$

Beweis a) Wir zeigen zunächst per Induktion

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x+t\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$$

$$\begin{aligned} \underline{k=1} \quad g'(t) &= \langle Df(x+t\xi), \xi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n D_i f(x+t\xi) \xi_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)!}{(k-1)!} g^{(k-1)}(t) &= \frac{d}{dt} g^{(k-1)}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(x+t\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n D_j \left(\dots \right) \xi_j \end{aligned}$$

$$\boxed{i_k=1} \quad = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f(x+t\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{k-1}} \xi_{i_k}$$

b) Zusammenfassen gleicher Ableitungen:
Kommt der Index j unter $(i_1, \dots, i_k)$ genau α_j mal vor ($j=1, \dots, n$), dann gilt

$$\begin{aligned} &D_{i_k} \dots D_{i_1} f(x+t\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \\ &= D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x+t\xi) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \\ &= D^\alpha f(x+t\xi) \xi^\alpha. \end{aligned}$$

(100) c) Abzählen gleicher Ableitungen

Es gibt genau $\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}$ k -Tupel $(i_1, \dots, i_n)$ von Indizes $1 \leq i_j \leq n$, bei denen der Index j genau α_j -mal auftritt. (ohne Beweis). Also gilt

$$g^{(k)}(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n} D_{i_1} \dots D_{i_n} f(x + f(x)) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n}$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + f(x)) \xi^\alpha$$

Bsp $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (y = x + f(x))$

$$g^{(3)}(x) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^2 D_{i_1} D_{i_2} D_{i_3} f(y) \xi_{i_1} \xi_{i_2} \xi_{i_3}$$

$$= \underbrace{D_1 D_1 D_1 f(y) \xi_1^3}_{\text{orange}} + \underbrace{D_1 D_1 D_2 f(y) \xi_1^2 \xi_2}_{\text{red}}$$

$$+ \underbrace{D_1 D_2 D_1 f(y) \xi_1^2 \xi_2}_{\text{red}} + \underbrace{D_1 D_2 D_2 f(y) \xi_1 \xi_2^2}_{\text{blue}}$$

$$+ \underbrace{D_2 D_1 D_1 f(y) \xi_1^2 \xi_2}_{\text{red}} + \underbrace{D_2 D_1 D_2 f(y) \xi_1 \xi_2^2}_{\text{blue}}$$

$$+ \underbrace{D_2 D_2 D_1 f(y) \xi_1 \xi_2^2}_{\text{blue}} + \underbrace{D_2 D_2 D_2 f(y) \xi_2^3}_{\text{green}}$$

$$= \underbrace{1}_{\text{orange}} \cdot D^{(3,0)} f(y) \xi^{(3,0)} + \underbrace{3}_{\text{red}} \cdot D^{(2,1)} f(y) \xi^{(2,1)}$$

$$+ \underbrace{3}_{\text{blue}} \cdot D^{(1,2)} f(y) \xi^{(1,2)} + \underbrace{1}_{\text{green}} \cdot D^{(0,3)} f(y) \xi^{(0,3)}$$

$$= \sum_{|\alpha|=3} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + f(x)) \xi^\alpha$$

mit $\alpha = \underbrace{(3,0)}_{\text{orange}}, \underbrace{(2,1)}_{\text{red}}, \underbrace{(1,2)}_{\text{blue}}, \underbrace{(0,3)}_{\text{green}}$

(101) Satz 7.2 (Taylor-Formel)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig diff. bar, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, x+\xi] \subseteq U$. Dann ex. $\theta \in [0, 1]$ mit

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

Beweis Sei $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(x+t\xi)$.

Dann ist g $(k+1)$ -mal stetig

diff. bar und nach Taylor-Formel für g (auf I) $\exists \theta \in [0, 1]$ mit

$$g(1) = \sum_{m=0}^k \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}$$

Und nach Lemma 7.1

$$\frac{g^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) \xi^\alpha$$

$$\frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha! (k+1)!} D^\alpha f(x+\theta\xi) \xi^\alpha$$

□