

(107) Lemma 7.8 Sei $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetr.
und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

Dann gilt

a) A pos. def. $\Leftrightarrow f$ strikt konvex

b) A pos. semidef. $\Leftrightarrow f$ konvex

c) f ist zweimal stetig diff. bar mit

$$\nabla f(x) = Ax - b, \quad H_f(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis a)+b) $\rightarrow$ Übung

c) Bem: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left[\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \langle x, A^T y \rangle \stackrel{A \text{ sym.}}{=} \langle x, Ay \rangle \\ &\stackrel{(\cdot)^T \text{ sym.}}{=} \langle Ay, x \rangle \end{aligned} \right]$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \langle b, x+h \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle Ax, x \rangle + \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle \right) - \langle b, x+h \rangle \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle}_{= f(x)} + \underbrace{\langle Ax, h \rangle - \langle b, h \rangle}_{= \langle Ax-b, h \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle}_{= r(h)} \end{aligned}$$

z. Z. $r(h) \in o(\|h\|)$

$$\left| \frac{r(h)}{\|h\|} \right| = \frac{1}{2} \frac{|\langle Ah, h \rangle|}{\|h\|} \leq \frac{1}{2} \frac{\|Ah\| \cdot \|h\|}{\|h\|} \leq \frac{1}{2} \|A\| \cdot \|h\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0.$$

Also $\nabla f(x) = Ax - b$ und $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
ist stetig (da affin linear).

Sei nun $F(x) = \nabla f(x) = Ax - b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x+h) &= A(x+h) - b \\ &= \underbrace{Ax - b}_{= F(x)} + Ah \\ &= F(x) + Ah + \underbrace{0}_{o(\|h\|)} \end{aligned}$$

D.h. $A = DF(x)$

6 zw. $A = H_f(x)$.

□

(108) Lemma 7.9 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und offen
und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$

a) Falls f stetig diff. bar, so gilt:

f konvex

$$\Leftrightarrow \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K$$

b) Falls f zweimal stetig diff. bar, so gilt:

f konvex

$$\Leftrightarrow H_f(x) \text{ pos. semidefinit} \quad \forall x \in K.$$

Beweis Übung

Extremum

Def 7.10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt $x \in U$

lokales Minimum (bzw. lokales Maximum),

wenn eine Umgebung $V \subseteq U$ von x ex.
mit

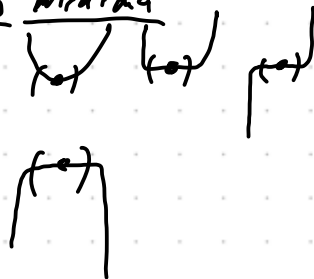
$$f(x) \leq f(y) \quad (\text{bzw. } \geq) \quad \forall y \in V.$$

Ein lokales Minimum (bzw. Max.) heißt
strikt, wenn sogar gilt:

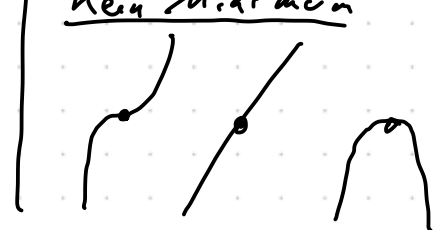
$$f(x) < f(y) \quad (\text{bzw. } >) \quad \forall y \in V, y \neq x.$$

x heißt lokales Extremum, wenn x
lokales Min. oder lokales Max. ist.

Bsp Minimum



kein Minimum



709 Satz 7.11 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ off. $f: U \rightarrow \mathbb{R}$
 part. diff. bar. Ist $x \in U$ ein lokales Extremum,
 so gilt $\nabla f(x) = 0$.

Beweis: Sei o.B.d.A. x lokales Minimum und
 $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(x) \subseteq U$ und
 $f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in B_\delta(x)$

gilt. Dann gilt für $i = 1, \dots, n$ und $0 < h < \delta$
 auch $x + he_i \in B_\delta(x)$, $x - he_i \in B_\delta(x)$, d.h.

$$f(x) \leq f(x + he_i) \quad \text{und} \quad f(x) \leq f(x - he_i)$$

und somit

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x) - f(x - he_i)}{h} \leq 0$$

Für $h \rightarrow 0$ erhalten wir

$$D_i f(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad D_i f(x) \leq 0,$$

$$\text{also} \quad D_i f(x) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

$\nabla f(x) = 0$ ist also ein
 notwendiges Kriterium für Extrema

Aber: $\nabla f(x) = 0$ reicht i. A. nicht aus
 für Extrema.

Bsp: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$
 $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein
Extremum.

D.h. um Extrema zu berechnen, kann
 man zunächst alle x mit $\nabla f(x) = 0$
 berechnen. Diese sind Kandidaten
 für Extrema.

Jetzt: hinreichende Kriterien

Zunächst ein "schöner" Spezialfall:

110) Lemma 7.12 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex,
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und stetig diff. bar.

Dann gilt

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \forall x, y \in U$$

Beweis Seien $x, y \in U$. Dann gilt nach Lemma 7.9 e)

$$\langle \nabla f(x + \lambda(y-x)) - \nabla f(x), \lambda(y-x) \rangle \geq 0$$

für $\lambda \in [0, 1]$. Also insbesondere

$$\langle \nabla f(x + \lambda(y-x)), y - x \rangle \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle. (*)$$

Sei nun $g(\lambda) = f(x + \lambda(y-x))$. Dann gilt
 nach MWS

$$f(y) = g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(\lambda) d\lambda$$

$$= f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x + \lambda(y-x)), y - x \rangle d\lambda$$

$$\stackrel{(*)}{\geq} f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x), y - x \rangle d\lambda$$

$$= f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle. \quad \square$$

Satz 7.13 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und
 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und stetig diff. bar. Dann

gilt für $x \in U$

$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow x$ ist ein globales Minimum
 (also insbes. lokales Minimum)

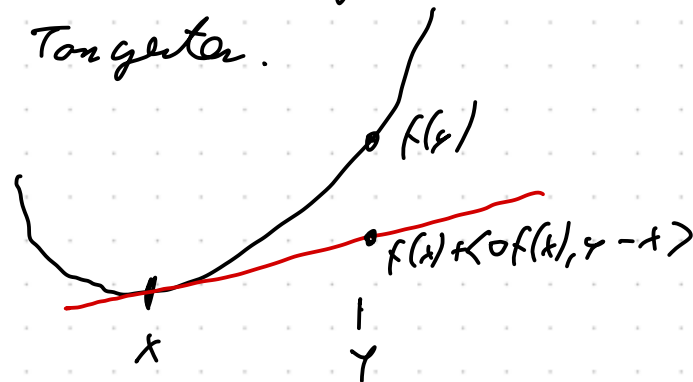
Beweis Wir müssen nur „ $\Rightarrow$ “ zeigen.

Seien $x, y \in U$ und $\nabla f(x) = 0$.

Dann gilt nach Lemma 7.12:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle = f(x). \quad \square$$

Anschaulich: Der Graph einer konvexen
 Funktion liegt immer oberhalb aller
 Tangenten.



7.74 Lemma 7.14 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $A: U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und $A(x_0)$ positiv definit für ein $x_0 \in U$. Dann ex. $\varepsilon > 0$, so dass $A(x)$ positiv def. $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$.

Beweis: Ang. es ex. kein $\varepsilon > 0$ mit....

Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein

$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$ und $y_n \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y_n\| = 1$ und $\langle A(x_n)y_n, y_n \rangle \leq 0$.

Da (y_n) beschränkt ist ex. TF mit

$y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_0$. Dann gilt auch $\|y_0\| = 1$.

Nun gilt (da $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$)

$$0 \geq \langle A(x_{n_k})y_{n_k}, y_{n_k} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle A(x_0)y_0, y_0 \rangle > 0$$

⚡

Satz 7.75 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diff. bar und $x \in U$ mit $0 f(x) = 0$ und $H_f(x)$ pos. def.

Dann ist x ein lokales Minimum.

Beweis: 1) Da $H_f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig, ex. laut Lemma 7.14 ein $\varepsilon > 0$, so dass $H_f(y)$ pos. def. $\forall y \in B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

2) Nach Lemma 7.96) ist $f|_K: K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $K = B_\varepsilon(x)$ konvex.

3) Nach Satz 7.93 reicht für die Konv. fkt $f|_K$ $0 f(x) = 0$ aus, damit x globales Minimum von $f|_K$ ist

4) Da $f = f|_K$ auf K ist x ein lokales Minimum von f . ⚡