(112) Bemerkung: Wir können Satz 7.15 etwas verstärken:

Satz 7.15' Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar und $x \in U$ mit $\nabla f(x) = 0$. Dann gilt

a) $H_f(x)$ pos. definit $\Rightarrow$ x striktes lokales Minimum

b) $H_f(x)$ negativ definit $\Rightarrow$ x striktes lokales Maximum

c) $H_f(x)$ indefinit $\Rightarrow$ x kein Extremum

Beweisskizze:

a) Satz 7.15, aber man kann zeigen, dass das Minimum strikt ist (Idee: f ist strikt konvex in $B_\varepsilon(x)$)

b) Wende a) auf $-f$

c) [Erinnerung (Lin A)
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt indefinit, wenn y, z ex. mit $\langle Ay, y \rangle > 0$ und $\langle Az, z \rangle < 0$.]

Idee Betrachte f entlang $x + ty$ und $x + tz$.

(Forster §7, Satz 4)

(113) Einschränkungen von Satz 7.15 und Satz 7.17

Achtung:

a) Es reicht nicht, wenn $H_f(x)$ positiv semidefinit ist!

Dann ist $H_f(y)$ nicht notwendig positiv semidef. in $B_\varepsilon(x)$.

Bsp: $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$

$f''(x)=6x$

Dann $f'(0)=0$ und $f''(0)=0$,

d.h. $\nabla f(0)=0$ und

$H_f(0)=0$ ist pos. semi def.

Aber $x=0$ ist kein lokales Minimum

b) Die Aussage „x Extremum $\Rightarrow \nabla f(x)=0$" gilt nur für offenes U.

Bsp $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Hier ist $x=1$ globales Minimum aber $f'(1)=2>0$

Ausweg: Variationsungleichungen

$$\langle \nabla f(x), \underbrace{y-x}_{\text{Richtung die in } U \text{ zeigt}} \rangle \geq 0 \quad \forall y\in U$$

($\rightarrow$ Optimierung, konvexe Analysis)

(114) Wie kann man überprüfen ob $H_f(x)$ pos. def. ist? (→ LinA)

Determinanten → Forster §7

<u>Satz 7.16</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sym. dann ex. eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, d.h.

$b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$, $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$

und $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$A b_i = \lambda_i \cdot b_i$

(b_i ist <u>Eigenvektor</u> zum <u>Eigenwert</u> λ_i)

und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind alle EWe.

<u>Beweis</u> LinA

<u>Es gilt:</u>

A pos. def $\iff \lambda_1 = \lambda_{min}(A) > 0$

(Satz von Courant-Fischer, Rayleigh-Quotient)

<u>Satz 7.17</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sym., dann

$$\lambda_{min}(A) = \min_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_{max}(A).$$

<u>Beweis</u> (LinA ?)

(Satz Gerschgorin, Gerschgorin-Kreise)

<u>Satz 7.18</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sym. und $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ die EWe von A. Dann

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\overline{B_{r_i}(a_{ii})}}_{[a_{ii} - r_i,\, a_{ii} + r_i]}$$

mit $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

<u>Beweis</u> (LinA)

$$\lambda_{min}(A) \geq \min_{i=1,\dots,n} a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

115

Bsp Sei $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$
mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sym.

$\nabla f(x) = Ax - b$, $H_f(x) = A$

Ang A invertierbar, dann ist $x = A^{-1}b$ der einzige Kandidat für Extrema.

A pos def. $\Rightarrow$ x ist striktes Min.
Da $H_f(y) = A$ pos. def $\forall y \in \mathbb{R}^n$ ist f konvex und x global.

A neg def $\Rightarrow$ x striktes Max

...

Bsp $f(x) = x_1^2 - x_2^2$

$$= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

mit $b = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

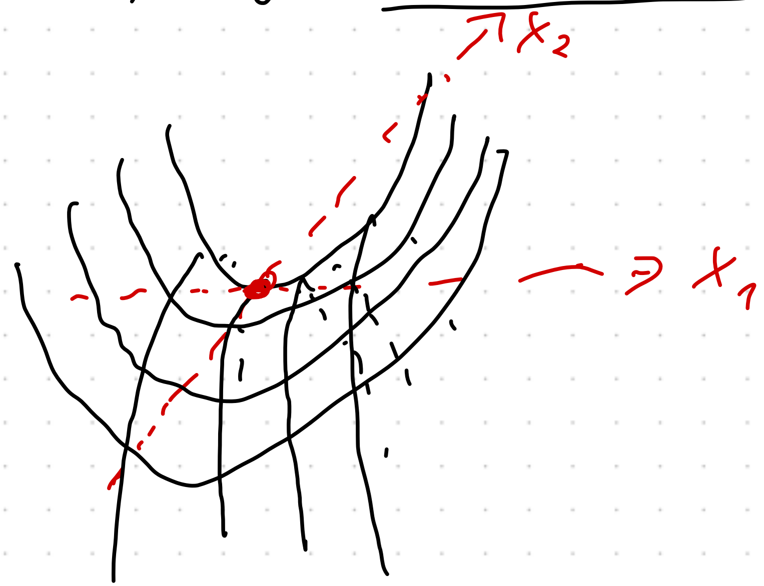
$0 = \nabla f(x) = (2x_1, -2x_2) \iff x = 0$

A ist indefinit:

$\langle Ae_1, e_1\rangle = 2$

$\langle Ae_2, e_2\rangle = -2$

$\Rightarrow$ $x = 0$ ist kein Extremum



(116) **8 Implizite Funktionen**

Motivation

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $F: U \to \mathbb{R}$

Wir betrachten die Gleichung

(1) $$F(x,y) = 0.$$

Im Allgemeinen wird (1) keine eindeutige Lösung (x,y) haben (1 Gleichung, 2 Unbekannte)

Frage:
- Gibt es zu jedem x ein (eindeutiges?) y mit $F(x,y) = 0$?
- Gibt es eine Abb. $x \mapsto y = g(x)$ mit $F(x, g(x)) = 0$?
- Ist g stetig / diff.bar?
- Was ist $g'(x)$?

g ist eine implizit definierte Funktion.

Zunächst nehmen wir an, dass es ein $g: I \to \mathbb{R}$ (I Intervall) mit

(2) $$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Ist $(x, g(x)) \in U$ $\forall x \in I$ und F und g diff.bar.

Setze $G(x) = (x, g(x))$. Dann ist (2) gerade

$$0 = F(x, g(x)) = F(G(x)) = (F \circ G)(x),$$

d.h. $F \circ G$ ist konstant. Also gilt nach Kettenregel

$$0 = D(F \circ G)(x) = (DF)(G(x))\, DG(x)$$

$$= D_1 F(x, g(x)) + D_2 F(x, g(x))\, g'(x).$$

Falls $D_2 F(x, g(x)) \neq 0$, dann

$$g'(x) = -\frac{D_1 F(x, g(x))}{D_2 F(x, g(x))}.$$

(117) Bsp: Was ist die Ableitung von $\arcsin = g$?

$g : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$F(x,y) = x - \sin(y)$, dann

$F(t, g(t)) = t - \sin(\arcsin(t)) = x - x = 0$

Also:

$$\arcsin'(x) = -\frac{D_1 F(x, g(x))}{D_2 F(x, g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Wir können g' durch F ausrechnen.

Können wir anhand von F überprüfen ob es ein g gibt?

Das sagt der Satz über implizite Funktionen.