

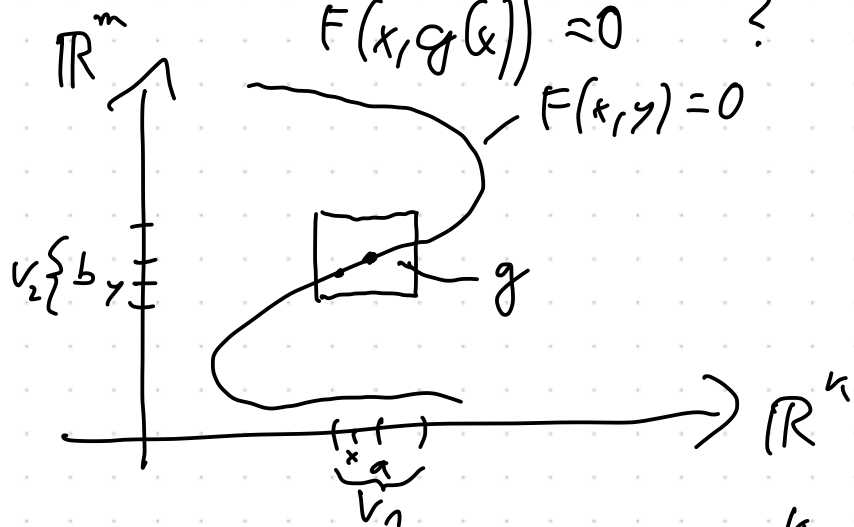
(118) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $F: U \rightarrow \mathbb{R}$

Gibt es zu x ein y mit

$$F(x, y) = 0 \quad ?$$

Gibt es eine Abb. g mit

$$F(x, g(x)) = 0 \quad ?$$



Satz 8.1 Seien $V_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $F: V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$(x, y) \mapsto F(x, y)$$

stetig diff. bar. Sei $(a, b) \in V_1 \times V_2$

ein Punkt mit

$$F(a, b) = 0.$$

Die $m \times m$ -Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

sei im Punkt (a, b) invertierbar.

Dann ex. eine offene Umgebung

$V_1 \subseteq V_1$ von a und eine Umgebung

$V_2 \subseteq V_2$ von b und eine stetig. diff. bar

Abb. $g: V_1 \rightarrow V_2$ mit $g(a) = b$ und

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1.$$

Ferner gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \in V_1 \times V_2 \\ \text{und } F(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = g(x)$$

(Satz über implizite Funktionen)

(119) Hilfsmittel für den Beweis:

Satz 8.2 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $A \subseteq X$ abgeschlossen, nicht leer und

$\Phi: A \rightarrow A$ (Selbstabbildung) mit
 $\exists L < 1$ mit

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in A$$

(Kontraktion)

Dann ex. genau ein $x^* \in A$ mit
 $\Phi(x^*) = x^*$ (Fixpunkt)

und $\forall x_0 \in A$ konvergiert die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \text{ (Fixpunktiteration)}$$

gegen x^* . Beweis: z.B. Förster §8, Satz 1
CoMa II

$(X, \|\cdot\|)$ Banachraum

$\Leftrightarrow$ vollständig normierter Raum
d.h. Vektorraum X mit Norm $\|\cdot\|$
und jede Cauchy-Folge konvergiert

Für $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ def. wir

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} \|f(x)\| \text{ (Supremumsnorm)}$$

Der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen auf U ist

$$C_b(U, \mathbb{R}^n) := \left\{ f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig, } \|f\|_\infty < \infty \right\}$$

Dann ist $(C_b(U, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$
ein Banachraum.

720) Beweis (Satz 8.1) O.B.d.A. $A(a,b) = (0,0)$.

a) Fixpunktformulierung

Satz e

$$B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Dann ist B invertierbar. Def.

$$G: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

durch

$$(1) \quad G(x,y) := y - B^{-1}F(x,y)$$

Für festes $x \in U_1$ gilt dann

$$F(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = y - B^{-1}F(x,y) = G(x,y)$$

$$\Leftrightarrow y \text{ ist Fixpunkt von } G(x, \cdot)$$

Zeige nun: Satz 8.2 ist anwendbar
auf $G(x, \cdot)$.

b) $G(x, \cdot)$ ist Kontraktion

Es gilt

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = I - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

und somit

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Da $\frac{\partial G}{\partial y}$ stetig ist ex. Umgebung $W_1 \subseteq U_1$

und $W_2 \subseteq U_2$ von 0 mit

$$(2) \quad \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in W_1 \times W_2$$

Wähle nun $r > 0$ so, dass

$$V_2 = \overline{B_r(0)} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y\| \leq r\} \subseteq W_2 \subseteq U_2.$$

Nun gilt $\forall x \in W_1$

$$(3) \quad \|G(x,y) - G(x,z)\| \leq \frac{1}{2} \|y - z\| \quad \forall y, z \in V_2.$$

D.h. $G(x, \cdot): V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist ein

Kontraktion und V_2 ist abgeschlossen.

(127) c) $G(x, \cdot)$ ist Selbstabbildung

Wegen $G(0,0) = (0,0) = 0$ ex. eine
offene Umgebung $V_1 \subseteq W_1 \subseteq U_1$ von 0

$$(4) \quad \sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\| = \varepsilon \leq \frac{r}{2}.$$

Außerdem folgt aus (3) und (4)
für $x \in V_1, y \in V_2, z=0$:

$$(5) \quad \|G(x,y)\| \leq \|G(x,y) - G(x,0)\| + \|G(x,0)\| \\ \leq \frac{1}{2} \|y\| + \frac{r}{2} \leq \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r$$

also $G(x,y) \in \overline{B_r(0)} = V_2.$

D.h. $\forall x \in V_1$ ist

$$G(x, \cdot) : V_2 \rightarrow V_2$$

eine Selbstabbildung.

d) Anwendung von Satz 8.2

Nach Banachschem FP-Satz ex. zu
 $x \in V_1$ genau ein FP γ von $G(x, \cdot)$, d.h.
genau ein y mit

$$\underline{G(x,y) = y}, \text{ bzw. } F(x,y) = 0.$$

(6)

Setze nun $g(x) := \gamma$. Dann gilt

- $g : V_1 \rightarrow V_2,$
- $F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in V_1$
- $g(0) = g(0) = 0 = 0 \quad (\text{da } G(0,0) = 0)$

Sei nun $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0$.
Dann gilt $G(x,y) = y$, d.h. y muß
der eindeutige FP aus (6) sein,
d.h. $y = g(x)$.

(722) e) g ist stetig

Betrachte den Banachraum
 $C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$ mit $\|\cdot\|_\infty$.

Für $v \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$ setze

$$g(v): V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$g(v)(x) = G(x, v(x)) \quad \forall x \in V_1.$$

Sei nun

$$A = \{v \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \mid \|v\|_\infty \leq r\}.$$

Dann ist A abgeschlossen.

$$\text{Für } v \in A \text{ und } x \in V_1 \text{ gilt}$$

$$\|v(x)\| \leq \sup_{x \in V_1} \|v(x)\| = \|v\|_\infty \leq r,$$

$$\text{d.h. } v(x) \in \overline{B_r(0)} = V_2. \text{ Also}$$

$$\|g(v)\|_\infty = \sup_{x \in V_1} \|G(x, v(x))\| \stackrel{(5)}{\leq} r.$$

Da $G(v)$ ferner stetig ist gilt

$$g: A \rightarrow A,$$

d.h. g ist Selbstabbildung.

Seien nun $v, w \in A$, dann folgt aus (3)

$$\|g(v) - g(w)\|_\infty = \sup_{x \in V_1} \|G(x, \underbrace{v(x)}_{\in V_2}) - G(x, \underbrace{w(x)}_{\in V_2})\|$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} \sup_{x \in V_1} \frac{1}{2} \|v(x) - w(x)\| = \frac{1}{2} \|v - w\|_\infty$$

D.h. $g: A \rightarrow A$ ist Kontraktion

Nach Satz 8.2 angewandt auf g
 ex. ein eindeutiges

$$\bar{g} \in A \subseteq C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \text{ mit}$$

$$g(\bar{g}) = \bar{g}, \text{ d.h.}$$

$$\bar{g}(x) = g(\bar{g})(x) = G(x, \bar{g}(x)).$$

Also muß muß $\bar{g} = g$ (eindeutig!)
 gelten.

(123) D.h. die eindeutig
Fkt g aus d) ist stetig.

f) g ist stetig diff. bar.

→ Forster §8, Satz 2. $\square$