(124) Anwendungen 1. Höhenlinien

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar

Erinnerung: $N_f(c) = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) = c\}$

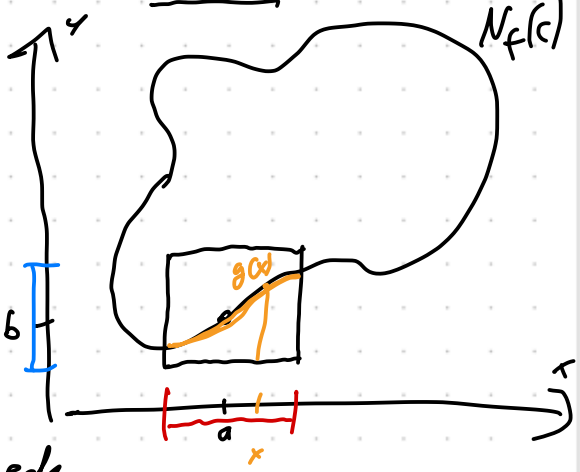
↑ Niveaufläche / Höhenlinie

Sei $(a,b) \in U$ und

$f(a,b) = c$

und

$\nabla f(a,b) \neq (0,0)$.



d.h. es gilt entweder

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

OBdA sei $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Def. $F: U \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y) = f(x,y) - c$.

Dann gilt $f(x,y) = c \Leftrightarrow F(x,y) = 0$

und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$

Nach Satz 8.1 ex. Intervalle I_1 und I_2 mit $(a,b) \in I_1 \times I_2 \subseteq U$ und ein stetig diff. bare Abb. $g: I_1 \to I_2$ mit

$$N_f(c) \cap I_1 \times I_2 = \{(x, g(x)) \mid x \in I_1\}.$$

2. Umkehrabbildungen

Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U_1 \to U_2$ stetig diff.bar.

Unter welchen Bed. ex f^{-1}?

Ist f^{-1} stetig/diff.bar?

Angenommen f^{-1} ex und ist stetig diff.bar

Dann gilt $f^{-1} \circ f = Id$, also nach Kettenregel (für $f(x) = y$)

$$D(f^{-1})(y) \, Df(x) = I$$

d.h. $Df(x)$ muß invertierbar sein!

(125) **Satz 8.3** (Satz von der Umkehrfunktion)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar.
Sei $a \in U$ und $b = f(a)$ und $Df(a)$ invertierbar.
Dann ex. eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von a
und eine offene Umgebung $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von b,
so dass $f: U_0 \to V_0$ bijektiv ist und

$$f^{-1}: V_0 \to U_0$$

ist stetig diff.bar mit

$$D(f^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}.$$

<u>Beweis</u> Sei $F: \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$(x,y) \mapsto F(x,y) = x - f(y)$$

Dann gilt $F(x,y) = 0 \iff f(y) = x$ und

$$F(b,a) = b - f(a) = 0$$

und $\dfrac{\partial F}{\partial y}(b,a) = -Df(a)$ ist invertierbar.

Nach Satz 8.1 über impl. Funktionen ex.
offene Umgebung $V' \subseteq \mathbb{R}^n$ von b und ein
Umgebung $U' \subseteq U$ von a und eine stetig
diff.bare Abb. $g: V' \to U'$ mit

a) $0 = F(x, g(x)) = x - f(g(x))$

also $x = f(g(x)) \quad \forall x \in V'$

b) $[(x,y) \in V' \times U'$ und $0 = F(x,y)]$ dann $y = g(x)$

Da f stetig ex. auch eine offene Umgebung
$U_0 \subseteq U'$ von a mit $f(U_0) \subseteq V'$.
Nach b) ist nun

$$V_0 := f(U_0) \subseteq V' \subseteq \mathbb{R}$$

offen, da g stetig ist.
Jetzt gilt

$$f: U_0 \to V_0$$

ist surj. und injektiv, und
$g = f^{-1}$ ist stetig diff.bar. ∎

126 **Bem** Ang f ist 2-mal stetig diff.bar.

Danach gilt für $g = f^{-1}$

$$Dg(y) = (Df)(g(y))^{-1}.$$

D.h. die rechte Seite ist stetig diff.bar, somit ist Dg stetig diff.bar, also ist auch g 2-mal stetig diff.bar.

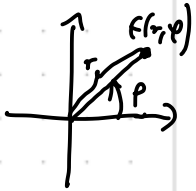
Per Induktion:

Ist f s-mal stetig diff.bar, dann ist auch f^{-1} s-mal stetig diff.bar.

Eine solche Abb. heißt ein

C^s-Diffeomorphismus.

Bsp: Polarkoordinaten



$$f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$(r,\varphi) \mapsto f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Dann

$$Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und

$$\det\left(Df(r,\varphi)\right) = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2$$

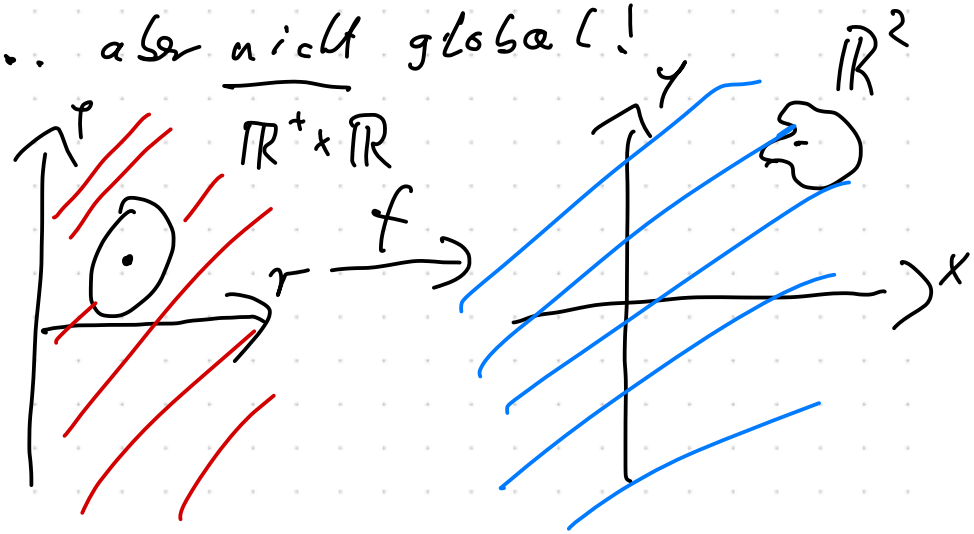
$$= r\underbrace{\left(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\right)}_{=1}$$

$$= r > 0$$

D.h. $Df(r,\varphi)$ ist invertierbar.

Also f lokal invertierbar.

... aber nicht global!



9. Gewöhnliche Differentialgleichungen

(im Forster II, §11, §12, ...)

Def 9.1

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : D \times I \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$x'(t) = F(x(t), t) \quad t \in I \tag{1}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung (1. Ordnung). Eine Funktion

$x : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von (1), falls:

- $x(t) \in D \quad \forall t \in I$
- x diff.bar auf I
- $$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = F(x(t), t) \quad \forall t \in I$$

Falls $F(x,t)$ nicht von t abhängt, heißt (1) autonom und wir schreiben ...

... $F : D \to \mathbb{R}^n$

$$x'(t) = F(x(t)) \quad \forall t \in I$$

bzw.

$$x' = F(x) \quad \text{in } I.$$

Bem fag: ordinary differential equation

(ODE)

Anschaulich:

- Lösungen x sind Kurven
- $t \triangleq$ Zeit
- $x(t)$ Zustand zum Zeitpunkt t
- $F(x,t)$ ist die gegebene aber lösungsabhängige Geschwindigkeit.

(128) Aag $F(x,t) = F(x)$, dann ist

$F: D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld

$F(x)$ ist die Geschwindigkeit der Kurve, wenn sie x passiert.

D.h. x bewegt sich entlang des Vektorfelds.