(129) Erinnerung: ODE

Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$

$$F : D \times I \to \mathbb{R}^n$$

Gesucht: $x : I \to \mathbb{R}^n$ mit

$$x'(t) = F(x(t), t) \qquad \forall t \in I$$

autonom wenn $F : D \to \mathbb{R}^n$

$$x'(t) = F(x(t)) \qquad \forall t \in I$$

kurz $x' = F(x)$ in $I$.

Ang $F(x,t) = F(t)$, d.h. rechte Seite hängt nicht von $x$ ab.

$$x'(t) = F(t)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds$$

$$= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds.$$

Allgemein gilt:

$$x'(t) = F(x(t), t)$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds$$

$$= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\,ds$$

Anfangswertproblem $I = [0, T)$

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t), t) & \text{auf } I \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

mit $F$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

(130) **Bsp**: Newton'sche Mechanik

## 2. Newton'sche Gesetz

Impulserhaltung:

Rate der Impulsänderung ist proportional zur Kraft
(Impuls = Masse · Geschwind.)

$M$ Masse
$x(t)$ Position $\in \mathbb{R}^d$
$x'(t)$ Geschwindigkeit
$x''(t)$ Beschleunigung

$$(Mx'(t))' = Mx''(t) = F(x(t), t)$$

$F: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$
Kraftfeld

**Spezialfall** Kraft hat ein Potential:

$$F(x) = -\nabla U(x)$$

für $U: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

**Gravitation** 2 Körper in $\mathbb{R}^3$

$$x = (x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$$

mit Massen $m_1, m_2$

Gravitationspotential

$$U(x) = -g \frac{m_1 m_2}{\underbrace{\|x_1 - x_2\|}_{r}}$$

(137) **Kepler-Problem**

$$m_1 x_1'' = -\frac{\partial}{\partial x_1} U(x_1, x_2)$$

$$m_2 x_2'' = -\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_1, x_2)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 I & 0 \\ 0 & m_2 I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

(1) $Mx'' = -\nabla U(x)$

Sei $p := Mx'$, dann (1) $\Leftrightarrow$

(2) $\begin{cases} Mx' = p \\ p' = -\nabla U(x) \end{cases}$

bzw $\begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M^{-1} p \\ -\nabla U(x) \end{pmatrix}}$ (3)

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}' = G\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

**Bsp** Moleküldynamik

$x \in \mathbb{R}^{3N}$, $N$ Teilchen (Atome, ...)

$U$ (elektrostat. Anziehung, ...)

**Numerische Verfahren zur näherungsweisen Lösung:**

- CoMa II, Numerik I, Numerik II

(132) Energie

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\langle M^{-1}p, p\rangle + U(x)$$

$$\left( = \frac{1}{2}\langle Mx', x'\rangle + U(x) \qquad p = Mx' \right)$$

$$(4)\quad \begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial p}(x,p) \\ p' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p) \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \nabla H(x,p)$$

$\boxed{\text{Hamilton-System}}$ $\Longleftrightarrow$ (3)

(ohne Beweis) Für jede Lösung gilt

$$H(x(t), p(t)) = H(x(0), p(0))$$

**Bsp** $\boxed{\text{Gradienten fluss}}$

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x'(t) = -\nabla J(x(t))$$

$$\frac{d}{dt}\big(J(x(t))\big) = \nabla J(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$= \nabla J(x(t)) \cdot (-\nabla J(x(t)))$$

$$= -\|\nabla J(x(t))\|^2 \leq 0$$

D.h. $J(x(t))$ fällt monoton

13.3) ODE 2. Ordnung

(1) $x''(t) = F(x'(t), x(t), t)$

setze $y(t) = x'(t)$, dann gilt

$x''(t) = y'(t)$,

d.h. (1) $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y(t) \\ F(y(t), x(t), t) \end{pmatrix}}$$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = G\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t\right)$

1.29

## Nichtautonome ODE $\to$ autonome ODE

(3) $\begin{cases} x'(t) = F(x(t), t), & x(0) = x_0 \end{cases}$

für $F : D \times I \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

setze $\hat{D} = D \times I$ und $G : \hat{D} = D \times I \to \mathbb{R}^{n+1}$

$y : I \to \mathbb{R}^{n+1}$, $y = (x, y_{n+1})$

$$G(y) = \begin{pmatrix} F(y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{cases} y'(t) = G(y) \\ y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Dann für $y = (x, y_{n+1})$

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t), y_{n+1}(t)) \\ y_{n+1}'(t) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = x^0 \\ y_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_{n+1}(t) = t$

$\Rightarrow x'(t) = F(x(t), t)$

D.h. $y = (x, t)$ löst (4)

$\Leftrightarrow$ $x$ löst (3) auf $I = (0, T)$

(4) ist autonom!

(135) **Bem** Autonome ODEs sind translations invariant bzgl. der Zeit, d.h.

sei $x : [0,T)$ Lösung von

$$(1)\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) & \forall t \in [0,T) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

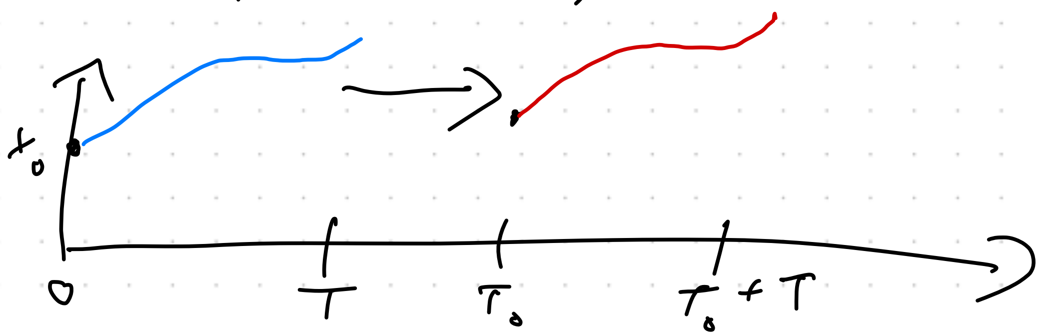
und $y : [T_0, T_0+T)$ Lösung von

$$(2)\begin{cases} y'(t) = F(y(t)) & \forall t \in [T_0, T_0+T) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

[Ang Lösungen sind eindeutig!]

dann gilt

$$x(t) = y(T_0+t)$$




**Satz 9.2** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ang. zu jedem $x_0 \in D$, ex. eindeutige Lösung $x : \mathbb{R} \to D$ von

$$(3)\begin{cases} x'(t) = F(x(t)), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Setze dann $\phi_t : D \to D$ mit

$$\phi_t(x_0) = x(t), \text{ wobei } x \text{ (3) löst.}$$

Dann gilt $\forall s,t \in \mathbb{R}$

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s.$$

Und für $\mathcal{G} = \{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Dann ist $(\mathcal{G}, \circ)$ eine abelsche Gruppe.

$\phi_t$ heißt Flussoperator.