

136 Satz 9.2 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Ang zu
 jedem $x_0 \in D$ ex. eine eindeutige Lösung
 $x: \mathbb{R} \rightarrow D$ von

$$(1) \quad x'(t) = F(x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad x(0) = x_0$$

Setze dann $\phi_t: D \rightarrow D$ mit

$$\phi_t(x_0) = x(t), \text{ wobei } x (1)/(2) \text{ L\"ost}$$

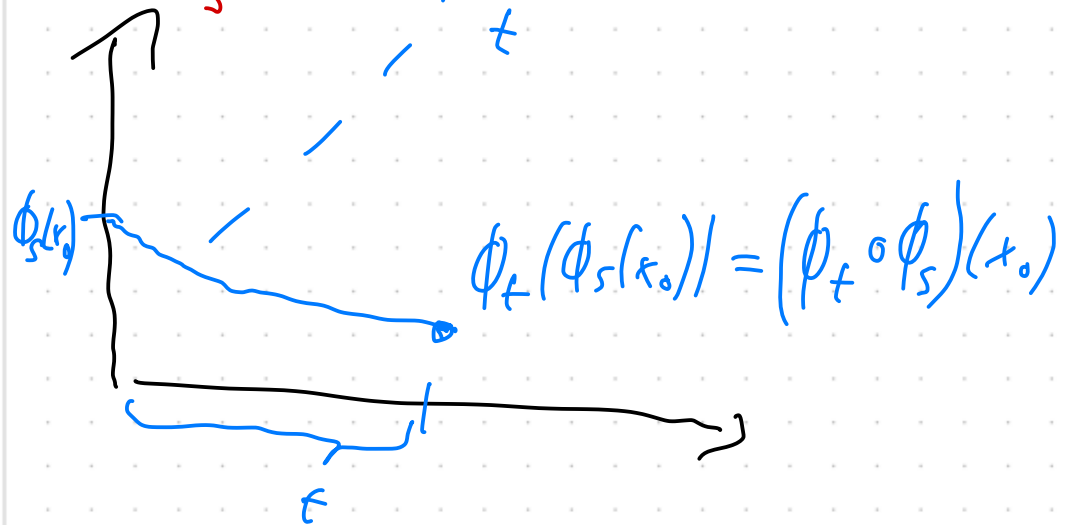
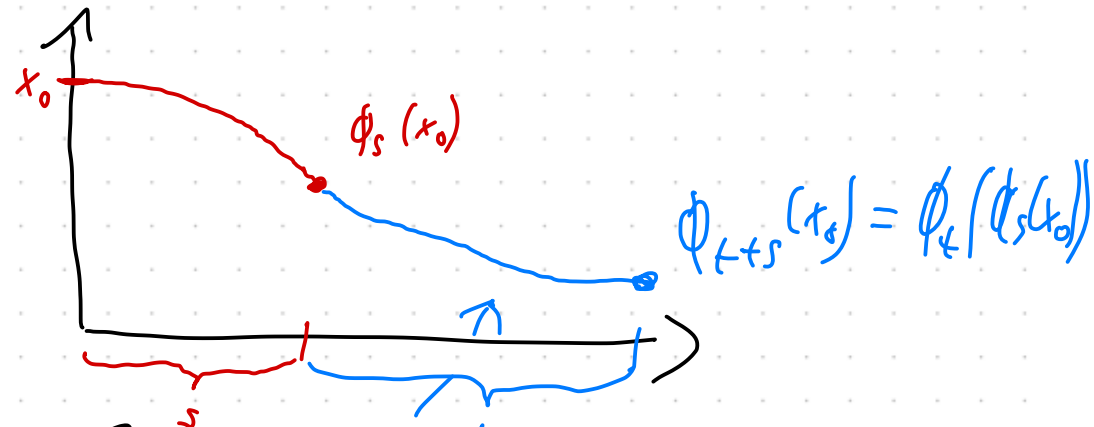
Dann gilt $\forall s, t \in \mathbb{R}$

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$$

und f\"ur $G = \{ \phi_t \mid t \in \mathbb{R} \}$ ist

$(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe.

ϕ_t hei\u00dft Flussoperator von (1).



937 Beweis Sei $x_0 \in D$ und x die Lösung von (1)+(2). Dann gilt

$$\phi_{t+s}(x_0) = x(t+s)$$

und

$$\phi_s(x_0) = x(s)$$

sei $y_0 = x(s) = \phi_s(x_0)$ und

y Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$(\phi_t \circ \phi_s)(x_0) = \phi_t(y_0) = y(t)$$

Gleichzeitig gilt (siehe Bem)

$$\phi_{t+s}(x_0) = x(t+s) \stackrel{\text{Bem}}{=} y(t) = (\phi_t \circ \phi_s)(x_0)$$

Seien $\phi_t, \phi_s, \phi_r \in \mathcal{G}$, dann

a) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \in \mathcal{G}$

b) $(\phi_t \circ \phi_s) \circ \phi_r = \phi_{t+s} \circ \phi_r = \phi_{(t+s)+r}$
 $= \phi_{t+(s+r)} = \phi_t \circ \phi_{s+r} = \phi_t \circ (\phi_s \circ \phi_r)$

c) $\phi_0(x_0) = x_0 \forall x_0 \in D, \phi_0 \circ \phi_s = \phi_{0+s} = \phi_s, \phi_0 = \text{Id}$

d) $\phi_{-t} \in \mathcal{G}, \phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_{-t+t} = \phi_0 = \text{Id}$

e) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} = \phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$

$\Rightarrow (\mathcal{G}, \circ)$ ist abelsche Gruppe. $\square$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi_t \in \mathcal{G}$$

ist Gruppenhomomorphismus

" $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathcal{G}, \circ)$ sind die gleiche Gruppe"

730 Berechnung von Lösungen

Spezialfall: Separierbare Variablen

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $t_0 \in I$ und $x_0 \in D$.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
und $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ und $x_0 \in D$.

Wir betrachten

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = g(x(t)) \cdot f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

bzw. für $F: D \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, t) = g(x) \cdot f(t)$

$$(2) \quad \begin{cases} x'(t) = F(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Zur Bestimmung von Lösungen setze

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds \quad G(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{g(s)} ds$$

D.h. Stammfunktionen von f und $\frac{1}{g}$.

Satz 9.3 Es gelte $F(I) \subseteq G(D)$.

Dann ex. genau eine Lösung $x: I \rightarrow D$
von (1). Für diese Lösung gilt

$$(3) \quad G(x(t)) = F(t) \quad \forall t \in I.$$

Beweis (Forster, § 11, Satz 1)

Trennung der Variablen:

1. Berechne $G(x(t))$ und $F(t)$.

2. Löse dann (3) nach $x(t)$ auf.

Merksatz (rein formal!)

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x' = g(x) f(t) \\ \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t) dt \\ \Rightarrow \int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t) dt + \text{const} \end{array} \right] \text{ formal}$$
$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds \quad (3)$$

739 Bsp
a) $x'(t) = -\frac{x(t)}{t} \quad [1, \infty)$

Schritt 1
 $\frac{1}{x(t)} = x(t) \cdot \frac{1}{-t}$
 $\int_{x_0}^t \frac{1}{s} ds = \int_1^t \frac{1}{-s} ds$

$$[\log s]_{x_0}^{x(t)} = [-\log s]_1^t$$

$$\log(x(t)) - \log(x_0) = \log(1) - \log(t)$$

$$\log\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = \log\left(\frac{1}{t}\right)$$

Schritt 2
 $x(t) = x_0 \cdot \frac{1}{t} = \frac{x_0}{t}$

$$\begin{cases} x'(t) = x_0 \left(-\frac{1}{t^2} \right) = \frac{x_0}{t} \cdot \frac{1}{-t} = x(t) \cdot \frac{1}{-t} \\ x(1) = x_0 \end{cases}$$

b) $x'(t) = \frac{t}{x(t)} = \frac{1}{x(t)} \cdot t$

$$\begin{aligned} x(t) \int_{x_0}^t ds &= \int_{t_0}^t s ds \\ \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_{x_0}^{x(t)} &= \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

$$x(t)^2 - x_0^2 = t^2 - t_0^2$$

$$(1) \quad x(t) = \sqrt{t^2 - t_0^2 + x_0^2}$$

Probe
 $x(t_0) = \sqrt{x_0^2} = |x_0|$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - t_0^2 + x_0^2}} \cdot 2t \\ &= \frac{1}{x(t)} \cdot t \end{aligned}$$

D.h. $x(t) = \sqrt{t^2 - t_0^2 + x_0^2}$ ist Lösung falls $x_0 \geq 0$,
 $x(t) = -\sqrt{t^2 - t_0^2 + x_0^2}$ ist Lösung falls $x_0 < 0$.

(740) Auflösung auf autonome ODEs

$$x'(t) = g(x(t)) \quad \cdot \quad \underbrace{1}_{f(t)}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{t_0}^t 1 ds = t - t_0$$

c) $x'(t) = \lambda x(t)$

linear,
autonom

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\lambda s} ds = t - t_0$$

$$\left[\log s \right]_{x_0}^{x(t)} = \lambda (t - t_0)$$

$$\log \frac{x(t)}{x_0} = \lambda (t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda (t - t_0)) \\ = x_0 e^{\lambda (t - t_0)}$$

d) Allgemein

$$x'(t) = \lambda(t) x(t)$$

linear
nicht autonom

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{s} ds = \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$$

$$\log \frac{x(t)}{x_0} = \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$$

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s) ds\right)$$

(141) e) $x'(t) = x(t)^2$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{s^2} ds = \int_{t_0}^t 1 ds = t - t_0$$

$$-\left[\frac{1}{s}\right]_{x_0}^{x(t)} = t - t_0$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t - t_0$$

$$\frac{1}{x(t)} = t_0 - t + \frac{1}{x_0}$$

$$x(t) = \frac{1}{t_0 - t + \frac{1}{x_0}}$$

falls $x_0 = 0$

Def 9.4 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ und

$F: D \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Man sagt:

a) F genügt einer Lipschitz-Bedingung,

wenn $L \geq 0$ ex. mit

$$\|F(x, t) - F(y, t)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall t \in I, x, y \in D$$

($F(\cdot, t)$ ist Lipschitz-stetig glw.
bzgl. t)

b) F genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung,

wenn zu jedem $x_0 \in D$, $t_0 \in I$ Umgebungen

$D' \subseteq D$ von x_0 und $I' \subseteq I$ von t_0 ex., so

dass $F: D' \times I'$ eine Lipschitz-Bedingung

genügt.

(D.h. $L = L(D', I')$ ist ex. (auch))

7.2 Eindeutigkeit

Satz 2.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

$F: D \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig
und genüge einer lokalen Lipschitz-
Bedingung. Dann gilt für je
zwei Lösungen $x_1: I \rightarrow D$, $x_2: I \rightarrow D$
von

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

immer $x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in I$.

D.h. es gibt höchstens eine Lösung.

Beweis (Forster §12, Satz 3)

Existenz:

Satz von Picard-Lindelöf

Satz 9.6 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes
Intervall, $F: D \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und genüge
einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

Dann ex. zu jedem $x_0 \in D$, $t_0 \in I$,
 $T_0, T \in I$ mit $T_0 < t_0 < T$ und

$$x: \underbrace{(T_0, T)}_{I' \subseteq I} \rightarrow D$$

mit $\begin{cases} x'(t) = F(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \forall t \in I'$

Nach Satz 2.5 ist x eindeutig.

Beweis (Forster §12, Satz 4)

743

F stetig $\Rightarrow$ Lösungen i. A.
nicht eindeutig

F lokal Lipschitz $\Rightarrow$ lokale Lösung,
eindeutig

F Lipschitz $\Rightarrow$ globale Lösungen,
eindeutig