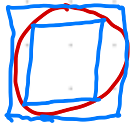
(144) **Nachtrag:** 

Erinnerung (Lemma 1.12)

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Heute: Für alle Normen $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ auf $\mathbb{R}^n$ ex. $C_1, C_2 > 0$:

$$C_1\|x\|_A \le \|x\|_B \le C_2\|x\|_A \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

(bzw. für bel. endl. dim VRe)

z.z.: Alle Normen auf endlich-dim. VRen sind äquivalent.

Lemma 3.21 Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ex. $C>0$ mit

$$\|x\| \le C\|x\|_\infty \le C\|x\|_2 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Beweis Sei $e^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ der k-te euklid. Basisvektor $(e^{(k)})_i = \delta_{ik}$. Sei nun $x\in\mathbb{R}^n$ bel., dann gilt

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}.$$

Also gilt wg. Δ's Ungleichung für $\|\cdot\|$

$$\|x\| = \Big\|\sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}\Big\| \le \sum_{k=1}^n |x_k|\,\|e^{(k)}\|$$

$$\le \Big(\max_{k=1,\dots,n}\|e^{(k)}\|\Big)\sum_{k=1}^n |x_k| \le \underbrace{\Big(\max_{k=1,\dots,n}\|e^{(k)}\|\,n\Big)}_{=C>0}\|x\|_\infty \le C\|x\|_2.$$

$\blacksquare$

Noch z.z. $\exists C'>0$ mit $\|x\|_2 \le C'\|x\| \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$.

Erinnerung: Umgekehrte Δ's Ungleichung

$$\begin{cases} \|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \\ \|y\| = \|y-x+x\| \le \|x-y\| + \|x\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \\ \|y\| - \|x\| \le \|x-y\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x-y\|$$

(195) **Korollar 3.22** Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist $f := \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig bzg. $\|\cdot\|_2$.

Beweis Sei (x_k) Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$ bzgl. $\|\cdot\|_2$, d.h. $\|x_k - x\|_2 \to 0$.

Dann gilt

$$|f(x_k) - f(x)| = \big|\|x_k\| - \|x\|\big| \le \|x_k - x\| \overset{\text{Lemma 3.21}}{\le} C\|x_k - x\|_2 \to 0.$$

D.h. $\|x_k\| = f(x_k) \to f(x) = \|x\|$. ■

Lemma 3.23 Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ex. $C' > 0$ mit

$$C'\|x\|_2 \le \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis Sei $S = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ die 1-Sphäre bzgl. $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{R}^n$.

Dann ist S abgeschlossen und beschränkt
Satz 3.8 (Heine-Borel): S ist kompakt.
$\Big\}$ bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Da $f(x) = \|x\|$ nach Kor 3.22 stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist, ex. $x_{min} \in S$ mit

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in S} f(x).$$

Wegen $x_{min} \in S$ gilt $\|x_{min}\|_2 = 1$, $x_{min} \neq 0$.
Also gilt

$$0 < \underbrace{\|x_{min}\|}_{=: C'} = f(x_{min}) \le f(x) = \|x\| \quad \forall x \in S.$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq 0$ bel.
Dann gilt $\frac{y}{\|y\|_2} \in S$, also

$$C' \le \left\| \frac{y}{\|y\|_2} \right\| = \frac{1}{\|y\|_2}\|y\|$$

$$\Rightarrow C'\|y\|_2 \le \|y\|.$$ ■

(146) <u>Satz 3.24</u> Seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, dann ex. $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1 \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C_2 \|x\|_A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D.h. alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

<u>Beweis</u>: Nach Lemma 3.21 und 3.23 ex. $C_A, C_A', C_B, C_B' > 0$ mit

$$\left.\begin{aligned} \|x\|_A &\overset{(1)}{\leq} C_A \|x\|_2, & C_A'\|x\|_2 &\overset{(3)}{\leq} \|x\|_A \\ \|x\|_B &\overset{(2)}{\leq} C_B \|x\|_2, & C_B'\|x\|_2 &\overset{(4)}{\leq} \|x\|_B \end{aligned}\right\} \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Also

$$\underbrace{\frac{C_B'}{C_A}}_{=C_1} \|x\|_A \overset{(1)}{\leq} C_B' \|x\|_2 \overset{(4)}{\leq} \|x\|_B$$

$$\|x\|_B \overset{(2)}{\leq} C_B \|x\|_2 \leq \underbrace{\frac{C_B}{C_A'}}_{=C_2} \|x\|_A. \qquad \boxtimes$$

<u>Konsequenz</u>: Konvergenz, CF, Stetigkeit, abgeschl., offen, kompakt, Abschluss, Inneres, Rand, Diffbarkeit, ... sind für $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ identisch!

(147) **Satz 3.25** Sei X ein endlich. dim $\mathbb{R}$-VR und $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ Normen auf X. Dann sind $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ äquivalent.

Beweis: Sei $\dim(X) = n$ und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von X. Dann $\Phi : \mathbb{R}^n \to X$ mit

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k \in X$$

ein Isomorphismus, d.h. linear, bijektiv, (siehe Lin A).

Setze nun

$$\|x\|_{\hat{A}} := \|\Phi(x)\|_A$$

und $\|x\|_{\hat{B}} := \|\Phi(x)\|_B$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann sind $\|\cdot\|_{\hat{A}}$ und $\|\cdot\|_{\hat{B}}$ Normen auf $\mathbb{R}^n$.

(z.B. $\|x+y\|_{\hat{A}} = \|\Phi(x+y)\|_A = \|\Phi(x) + \Phi(y)\|_A$
$\leq \|\Phi(x)\|_A + \|\Phi(y)\|_A = \|x\|_{\hat{A}} + \|y\|_{\hat{A}}$
usw ...)

Also ex. nach Satz 3.24 $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1 \|y\|_A = C_1 \|\Phi(\Phi^{-1}(y))\|_A = C_1 \|\Phi^{-1}(y)\|_{\hat{A}}$$
$$\leq \|\Phi^{-1}(y)\|_{\hat{B}} = \|y\|_B$$
$$\|y\|_B \leq C_2 \|\Phi^{-1}(y)\|_{\hat{A}} = C_2 \|y\|_A$$

D.h. $C_1 \|y\|_A \leq \|y\|_B \leq C_2 \|y\|_A \; \forall y \in X$.

Bem Sei X endlich dim VR mit $\dim(X) = n$. Dann hat X die gleichen topologischen Eigenschaften wie $\mathbb{R}^n$:

z.B. $\overline{B_1(0)} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt. (Verwende Φ)

(148) Satz 3.26

Sei X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann sind äquivalent:

a) $\dim(X) < \infty$

b) $\overline{B_1(0)} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.

c) Ist (x_n) eine beschränkte Folge in X, so ex. eine konvergente Teilfolge.

Beweis a) $\Rightarrow$ b) Satz 3.8 (Heine-Borel)

b) $\Rightarrow$ c) Satz 3.16 (Bolzano-Weierstraß)

c) $\Rightarrow$ a) ?

Lemma 3.27 (Riesz'sche Lemma)
Sei X normierter $\mathbb{R}$-VR, $\delta \in (0,1)$ bel. und $U \subsetneq X$ ein abgeschlossener, echter Raum. Dann ex. ein $x_\delta \in X \setminus U$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\|x_\delta - u\| \geq \delta \qquad \forall u \in U$$

Zeige $\neg a) \Rightarrow \neg c)$. Sei $\dim(X) = \infty$.
Wir konstruieren induktiv eine Folge (x_k) mit $\|x_\ell\| = 1$ und $\|x_\ell - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall \ell \neq m$ (*)

$k = 1$: Sei x_1 bel. mit $\|x_1\| = 1$.

$k \to k+1$: Ang. $x_1, \dots, x_k$ mit (*) $\forall \ell, m \leq k, \ell \neq m$ ist bereits konstruiert. Setze dann $U = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$. Dann ist U abgeschl.. Wegen $\dim(U) \leq k$ und $\dim(X) = \infty$ gilt $U \neq X$. Nach Lemma 3.27 ex. x_{k+1} mit $x_{k+1} \in X \setminus U$, $\|x_{k+1}\| = 1$ und

$$\|x_{k+1} - u\| \geq \delta = \frac{1}{2} \quad \forall u \in U.$$

D.h.

$$\|x_\ell - x_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall m, \ell \leq k+1, m \neq \ell.$$

Wegen $\|x_k\| = 1$ ist (x_k) beschränkt. Wegen $\|x_\ell - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall \ell \neq m$ kann keine Teilfolge CF sein, d.h. keine TF kann konvergieren. $\square$

(149) Beweis (Lemma 3.27)

Elementar, siehe, z.B.
D. Werner „Funktionalanalysis".

Konsequenz: In unendlich dim. VRen
muß man oft andere Topologien betrachten
um Kompaktheit nutzen zu können.

Ausblick:

- Analysis III Integration
- Funktionalanalysis: Analysis in ∞-dim Räumen
- Dyn. Systeme zeitabhängige Prozesse
- Part. Diffgleichungen Analysis von ...
- Differentialgeometrie gekrümmte Fläche