(144) **Nachtrag:**

Alle Normen auf endlich-dim Räumen sind äquivalent. D.h. wir wollen zeigen: Für alle Normen $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ ex. $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1 \|x\|_A \le \|x\|_B \le C_2 \|x\|_A \quad \forall x.$$

Erinnerung (Lemma 1.12) Wir wissen bereits:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

Lemma 3.21 Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Dann ex. $C > 0$ mit

$$\|x\| \le C\|x\|_\infty \le C\|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Beweis Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $x = \sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}$ wobei $e^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $(e^{(k)})_{ij} = \delta_{ij}$. Also gilt nach Δ's Ungleichung

$$\|x\| = \|\sum_{k=1}^n x_k e^{(k)}\| \le \sum_{k=1}^n |x_k|\, \|e^{(k)}\|$$

$$\le \max_{k=1,\dots,n} \|e^{(k)}\| \sum_{=1}^n |x_k| \le \underbrace{\left(\max_{k=1,\dots,n} \|e^{(k)}\|\, n\right)}_{=:C>0} \|x\|_\infty \overset{\text{Lemma 1.12}}{\le} C\|x\|_2$$

$\boxtimes$

Noch z.z. $\exists\, C' > 0$ mit $\|x\|_2 \le C' \|x\|$.

Korollar 3.22 Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist $f = \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Beweis Sei (x_k) Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$ bzgl. $\|\cdot\|_2$. Z.z. $f(x_k) = \|x_k\| \to \|x\| = f(x)$.

[Erinnerung: Umgekehrte Δ's Ungleichung:

$$\|a\| = \|a - b + b\| \le \|a-b\| + \|b\|$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \|a\| - \|b\| \le \|a-b\| \\ &\Rightarrow \|b\| - \|a\| \le \|b-a\| = \|a-b\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \big|\|a\| - \|b\|\big| \le \|a-b\|$$
]

Also gilt

$$|f(x_k) - f(x)| = \big|\|x_k\| - \|x\|\big| \le \|x_k - x\| \le C\|x_k - x\|_2 \to 0,$$

d.h. $f(x_k) \to f(x)$. $\boxtimes$

(145) **Lemma 3.23** Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ex. $C'>0$ mit $C'\|x\|_2 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis Sei $S := \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ die 1-Sphäre in $\mathbb{R}^n$ bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Damit ist S abgeschlossen und beschränkt, also kompakt bzgl. $\|\cdot\|_2$. Da $f(x) = \|x\|$ nach Kor 3.22 stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist, ex. $x_0 \in S$ mit

$$f(x_0) = \inf_{x \in S} f(x).$$

Wegen $x_0 \in S$ gilt $\|x_0\|_2 = 1 \Rightarrow x_0 \neq 0 \Rightarrow C' := f(x_0) > 0$.

Also gilt

$$C' = f(x_0) \leq f(x) = \|x\| \quad \forall x \in S.$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, bel. Dann gilt $\frac{y}{\|y\|_2} \in S$, also

$$C' \leq \left\| \frac{y}{\|y\|_2} \right\| = \frac{1}{\|y\|_2} \|y\|$$

$$\Rightarrow \quad C'\|y\|_2 \leq \|y\|.$$

$\boxtimes$

Satz 3.24 Seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, dann sind $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ äquivalent, d.h. es ex. $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1 \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C_2 \|x\|_A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Nach Lemma 3.21 und 3.23 ex. $C_A, C_A', C_B, C_B' > 0$ mit

$$\|x\|_A \leq C_A \|x\|_2, \quad C_A'\|x\|_2 \leq \|x\|_A$$

$$\|x\|_B \leq C_B \|x\|_2, \quad C_B'\|x\|_2 \leq \|x\|_B.$$

Also

$$\underbrace{\frac{C_B'}{C_A}}_{=C_1>0} \|x\|_A \leq C_B'\|x\|_2 \leq \|x\|_B \leq C_B\|x\|_2 \leq \frac{C_B}{C_A'} \|x\|_A.$$

$\boxtimes$

Konsequenz Konvergenz, CF, Stetigkeit, abgeschl., offen, kompakt, Abschluss, Inneres, Rand, ... sind für $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B, \|\cdot\|_2$ identisch!

(146) **Satz 3.25** Sei X ein endlich. dim VR und $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ zwei Normen auf X. Dann sind $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ äquivalent.

Beweis Sei $\dim(X)=n$ und $b_1,\dots,b_n$ eine Basis von X.

Dann ist $\Phi: \mathbb{R}^n \to X$ mit $\Phi(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k b_k \in X$ ein Isomorphismus (linear & bijektiv).

Setze nun $\|x\|_{\hat{A}} := \|\Phi(x)\|_A$

und $\|x\|_{\hat{B}} := \|\Phi(x)\|_B$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann sind $\|\cdot\|_{\hat{A}}$ und $\|\cdot\|_{\hat{B}}$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Also ex. $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1 \|y\|_A = C_1 \|\Phi(\Phi^{-1}(y))\|_A = C_1 \|\Phi^{-1}(y)\|_{\hat{A}} \leq \|\Phi^{-1}(y)\|_{\hat{B}}$$

$$= \|y\|_B \leq C_2 \|\Phi^{-1}(y)\|_{\hat{A}} = C_2 \|y\|_A$$

$\forall y \in X.$

■

Bem Sei X ein endlich dim VR mit $\dim X = n$. Dann hat X die gleichen topologischen Eigenschaften wie $\mathbb{R}^n$. z.B. ist

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

kompakt.

147

Satz 3.26

Sei X ein normierter Vektorraum.

Dann sind äquivalent:

a) $\dim(X) < \infty$

b) $\overline{B_1(0)} = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ ist kompakt.

c) Ist (x_n) eine beschränkte Folge in X, so ex. eine konvergente TF.

Beweis a) ⇒ b) Satz 3.8 (Heine-Borel)

b) ⇒ c) Satz 3.16 (Bolzano-Weierstraß)

c) ⇒ a)

[**Lemma 3.27** (Riesz'sches Lemma). Sei X normierter VR, $\delta \in (0,1)$ bel. und $U \subsetneq X$ ein abgeschlossener echter Unterraum. Dann ex. ein $x_\delta \in X$ mit $x_\delta \notin U$, $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\|x_\delta - u\| \ge \delta \quad \forall u \in U.$$
]

Zeigen $\neg a) \Rightarrow \neg c)$. Sei $\dim(X) = \infty$.

Wir konstruieren induktiv eine Folge (x_k) mit $\|x_\ell\| = 1$ und $\|x_\ell - x_m\| \ge \frac{1}{2}$ $\forall \ell, m$ (⊛)

$k=1$ Sei x_1 bel. mit $\|x_1\| = 1$.

$k \to k+1$ Ang. $x_1, \dots, x_k$ mit ⊛ $\forall \ell, m \le k$ ist bereits konstruiert. Setze $U = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$. Dann ist U ein abgeschl. Unterraum von X. Wegen $\dim(U) \le k$ und $\dim(X) = \infty$ ex. nach Lemma 3.27 ein x_{k+1} mit $\|x_{k+1}\| = 1$ und $\|x_{k+1} - \underbrace{x_\ell}_{\in U}\| \ge \frac{1}{2} = \delta$ $\forall \ell \le k$.

Wegen $\|x_k\| = 1$ $\forall k$ ist (x_k) beschränkt. Sei (x_{k_ℓ}) eine TF. Dann gilt

$$\|x_{k_\ell} - x_{k_m}\| \ge \frac{1}{2} \quad \forall \ell \ne m.$$

Also ist (x_{k_ℓ}) keine CF, also nicht konvergent. D.h. (x_k) hat keine konv. TF. ∎

148 **Beweis** (Lemma 3.27).

Sei $x \in X \setminus U$. Dann gilt, da U abgeschl.

$$d = \mathrm{dist}(x, U) > 0 \quad (\text{Kor. } 3.15).$$

Also ex. zu $0 < d < \frac{d}{\delta}$ ein $u_\delta \in U$ mit

$$\|x - u_\delta\| \leq \frac{d}{\delta}.$$

Setze

$$x_\delta := \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}. \text{ Dann } \|x_\delta\| = 1$$

und

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x}{\|x - u_\delta\|} - \frac{u_\delta}{\|x - u_\delta\|} - u \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x - u_\delta\|} \Big\| x - \underbrace{(u_\delta + \|x - u_\delta\| u)}_{\in U} \Big\|$$

$$\geq \frac{1}{\|x - u_\delta\|} \cdot d$$

$$\geq \frac{\delta}{d} \cdot d = \delta \qquad \blacksquare$$

In unendlichdim. VRen muß man oft andere Topologien betrachten, um Kompaktheit nutzen zu können. → Funktionalanalysis

Ausblick

- Funktionalanalysis: top. Eigenschaften ∞-dim VRe
- Dyn. Systeme: zeitabhängige Prozesse
- Part. Diff.gleichungen Analysis von ...
- Differentialgeometrie gekrümmte Flächen, ...