Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

1. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 23. April 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (2 Punkte)
Sei X ein normierter Raum mit allgemeiner Norm $\|\cdot\|$. Beweisen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\|x-y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben seien auf $\mathbb{R}^2$ die Abbildungen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch

$$\|(x,y)\|_1 := |x| + |y| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

bzw.

$$\|(x,y)\|_\infty := \max(|x|, |y|) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Beweisen sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf $\mathbb{R}^2$ sind und zeichnen sie die Sphären der Einheitskugeln in diesen Normen in der x, y-Ebene, d.h. zeichnen sie die Mengen

$$S_{\|\cdot\|_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_1 = 1\} \quad \text{und} \quad S_{\|\cdot\|_\infty} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_\infty = 1\}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf $X = X_1 \times X_2$ sei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

Zeigen sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

4. Aufgabe (6 Punkte)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $d' : M \times M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d'(x,y) := \min\{d(x,y), 1\}.$$

Zeigen Sie:

a) (M, d') ist ein metrischer Raum.

b) $U \subset M$ ist genau dann offen bezüglich d, wenn U offen bezüglich d' ist.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.