Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

2. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 30. April 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (2 Punkte)
Sei (M, d) ein metrischer Raum mit $d(x, y) = \|x - y\|$. Finden sie eine weitere Metrik d', die **nicht** von einer Norm induziert ist, so dass die Umgebungen bezüglich dieser Metrik dieselben sind wie die bezüglich der Metrik d.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Beweisen sie, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und d' eine weitere Metrik auf M mit

$$d'(x, y) \leq d(x, y) \qquad \forall x, y \in M.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) Wenn $O \subseteq M$ offen bezüglich d' ist, so ist O auch offen bezüglich d.

b) Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M bezüglich d gegen ein $a \in M$ konvergiert, so konvergiert sie auch bezüglich d' gegen a.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass offene Mengen folgende Eigenschaften besitzen:

a) Der Durchschnitt zweier offenen Mengen ist offen, d.h., sind $O_1, O_2 \subseteq M$ offen, so ist $O_1 \cap O_2$ offen.

b) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen, d.h., ist $(O_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von M mit beliebiger Indexmenge I, so ist $\bigcup_{i\in I} O_i$ eine offene Menge.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.