Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

3. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 7. Mai 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (2 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und für $a \in X$ sei $B_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ die offene und $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel bezüglich d.
In normierten Räumen gilt insbesondere

$$\overline{B_r(a)} = \bar{B}_r(a).$$

Geben sie ein Beispiel eines metrischen Raumes an, so dass

$$\overline{B_r(a)} \neq \bar{B}_r(a).$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei V Vektorraum und $p : V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

$$p(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,$$

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \;\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zeigen sie, p ist genau dann eine Norm, wenn die Einheitskugel bezüglich p konvex ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Finden sie eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $M^o = \emptyset$ und $\overline{M} = \mathbb{R}^2$ und beweisen sie, dass sie diese Eigenschaften tatsächlich hat.
Ist M offen? Ist M abgeschlossen? Beweisen sie ihre Aussage.

4. Aufgabe (4 Bonus Punkte)
Geben sie einen Hausdorff Raum an, der kein metrischer Raum ist.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.