Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

4. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 14. Mai 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (6 Punkte)
Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent

a) f ist stetig.

b) Urbilder offener Mengen sind offen, d.h.

$$\big(U \subset Y \text{ offen } \Rightarrow f^{-1}(U) \subset X \text{ offen.}\big)$$

c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, d.h.

$$\big(A \subset Y \text{ abgeschlossen } \Rightarrow f^{-1}(A) \subset X \text{ abgeschlossen.}\big)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $X \backslash f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \backslash A)$.

2. Aufgabe (2 Punkte)
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Beweisen Sie:
f ist genau dann stetig im Punkt $a \in X$, wenn zu jeder Umgebung $U \subset Y$ von $f(a)$ eine Umgebung $V \subset X$ von a existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt: $x \in V \Rightarrow f(x) \in U$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die n-variaten Polynome $\mathcal{P}_r(\mathbb{R}^n)$ vom Grad höchstens r einen Vektorraum der Dimension

$$\dim(\mathcal{P}_r(\mathbb{R}^n)) = \binom{n+r}{r}$$

bilden.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Seien V und W zwei normierte Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass T genau dann stetig ist, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \qquad \forall x \in V.$$

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.