Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

5. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php`

Abgabe: Fr., 21. Mai 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass A genau dann kompakt in (X, d) ist, wenn (A, d) ein kompakter metrischer Raum ist, d.h., wenn A kompakt in (A, d) ist.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $U \subset A$ genau dann offen in (A, d) ist, wenn $U \cup (X \setminus A)$ offen in (X, d) ist.)

b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist homöomorph zum abgeschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Vereinigung von endlich vielen kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes wieder kompakt ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und es gelte: Zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in A$, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x \in A$. Zeigen Sie, dass dann A kompakt ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und d die diskrete Metrik. Zeigen Sie,

$$A \subseteq X \text{ kompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ endlich.}$$

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.