

6. Übung zur Vorlesung

ANALYSIS II

SoSe 2021

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS\\_2020/analysisII.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php)

**Abgabe: Fr., 28. Mai 2021, 12:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

**Satz (Satz von Dini)** Sei  $M$  eine Menge und  $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Wenn zusätzlich  $M$  kompakt ist,  $(f_n)_n$  monoton wachsend ist, d.h.  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$  gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $x \in M$ , und  $f$  stetig ist, so konvergiert  $(f_n)_n$  auch gleichmäßig gegen  $f$ , d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

Dies gilt auch, wenn  $(f_n)_n$  monoton fallend statt wachsend ist.

Zeigen Sie, dass der Satz jeweils ohne die folgende Voraussetzung nicht anwendbar ist:

- Stetigkeit von  $f$
- Monotonie der  $(f_n)_n$
- Kompaktheit von  $M$

Finden Sie dazu Gegenbeispiele.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokal beschränkte Abbildung, d.h. zu jedem  $x \in X$  existiert eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  in der  $f$  beschränkt ist. Zeigen Sie, dass  $f$  auf ganz  $X$  beschränkt ist, wenn  $X$  kompakt ist.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subset X$  kompakt und  $x \in X$  beliebig. Der Abstand von  $x$  und  $K$  ist definiert durch

$$\text{dist}(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y).$$

Zeigen Sie, dass ein  $x_K \in K$  existiert, mit  $d(x, x_K) = \text{dist}(x, K)$ .

**4. Aufgabe** (4 Punkte)

Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  kompakte Intervalle und  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Die Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  werde definiert durch

$$F(x) := \sup\{f(x, y) \mid y \in J\}.$$

Zeigen Sie, dass  $F$  stetig ist.

ALLGEMEINE HINWEISE

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.