Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

7. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 4. Juni 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (3 Punkte)
Plotten Sie für die folgenden Kurven $f : I \to \mathbb{R}^n$ mit einem Visualisierungsprogramm ihrer Wahl jeweils das Bild $\subset \mathbb{R}^n$ und den Graphen $\subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Funktion f sowie die Graphen aller Komponentenabbildungen f_i:

a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \sin t)$,

b) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, f(t) = (t^3, t^2)$,

c) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, f(t) = (\sin t)$.

2. Aufgabe (3 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Kurven auf Doppelpunkte und singuläre Stellen:

a) $f_1(t) = (t, t^2)$,

b) $f_2(t) = (t^3, t^2)$,

c) $f_3(t) = (t^3 - 1, t^2 - 1)$.

3. Aufgabe (8 Punkte)
Betrachten Sie für $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die durch

$$f(t) = (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t)$$

definierte Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

a) Skizzieren Sie die Kurve für $c = (2\pi)^{-1}$ im Fall $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

b) Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bezeichne $L_{a,b}$ die Länge der auf dieses Intervall restringerten Kurve $f|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.

c) Untersuchen Sie $L_{a,0}$ im Limes $a \to -\infty$.

d) Zeigen Sie, dass die Kurve f jeden Kreis um den Nullpunkt $(0, 0)$ in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Kosinus des Schnittwinkels.
Hinweis: Parametrisieren Sie den Kreis kanonisch mit $\tau \in [0, 2\pi)$. Dann können Sie mittels $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ die Schnittstellen $t_s \in \mathbb{R}$ allein durch c und r ausdrücken.

4. Aufgabe (2 Punkte)
Zeigen Sie: Die Länge einer Kurve ist invariant unter Parametertransformation, d.h. sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve, $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall und $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ surjektiv und stetig differenzierbar mit $\phi' > 0$, dann gilt für die Kurve $g = f \circ \phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\| \, d\tau = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt.$$

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.