Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

8. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 11. Juni 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte)
Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x_2 \left(2x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(einmal) partiell differenzierbar ist und berechnen Sie dort ihre partiellen Ableitungen.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sei definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, && \text{für } x \neq 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Unter der Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v versteht man (im Falle der Existenz) den Differentialquotienten

$$D_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv)\bigg|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

Überprüfen Sie für

a) $x \neq 0$

b) $x = 0$

für welche v die Richtungsableitungen existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sei definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, && \text{für } x \neq 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$D_1 D_2 f(0) \neq D_2 D_1 f(0).$$

Ist f im Nullpunkt stetig?

4. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator invariant unter Orthogonaltransformationen ist, d.h. sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und T_A eine orthogonale Transformation definiert durch

$$T_A f = f \circ A, \qquad A \ (n \times n) \text{ - Matrix mit } AA^T = Id,$$

dann gilt

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A.$$

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.