Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

9. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 18. Juni 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (3 Punkte)

a) Zeigen Sie, die Funktion $f_1 : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_1(x) = \log(\|x\|)$$

ist eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$.

b) Zeigen Sie, die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_2(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x^2}{4t})$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

c) Zeigen Sie, die Funktion $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_3(x,t) = \sin(x+t)$$

ist eine Lösung der Wellengleichung $\Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $f : [a,b] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial f}{\partial x}(a,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(b,t) = 0$, für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie,

a) löst f die Wärmeleitungsgleichung, dann gilt

$$\int_a^b f(x,t)\,dx = \text{const}$$

b) löst f die Wellengleichung, dann gilt

$$\frac{1}{2} \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right|^2 dx = \text{const}.$$

Hinweis: partielle Integration!
Außerdem dürfen Sie die Identität $\int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x,t)\,dx$ verwenden.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r,\theta,\varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit beschränktem Differential, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|Df(x)\| \leq C \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Zeigen Sie, dass f in U gleichmäßig stetig ist.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.