Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

10. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 25. Juni 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x_2^2 - 4x_1^2 x_2 + 3x_1^4.$$

Zeigen Sie, dass jede Einschränkung $f_{|g}$ auf eine Gerade g durch den Ursprung ein lokales Minimum in 0 besitzt, f selbst jedoch nicht.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in x. Zeigen Sie, dass $\nabla f(x)$ in folgendem Sinne orthogonal zum Levelset $N_f(c) = \{y \in U \mid f(y) = c\}$ mit $c = f(x)$ steht:
Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve in $N_f(c)$, d.h. $\varphi(t) \in N_f(c)$ für alle $t \in I$, mit $\varphi(t_0) = x$, $t_0 \in I$, dann gilt für den Tangentialvektor $\varphi'(t_0)$

$$\langle \nabla f(x), \varphi'(t_0) \rangle = 0.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Finden Sie Beispiele $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, stetig differenzierbar, so dass

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x) \neq Df(x)Dg(f(x)).$$

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$D(g \circ \nabla f)(x) = D\nabla f(x)Dg(\nabla f(x)) = Dg(\nabla f(x))^T D\nabla f(x).$$

4. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels), dass folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ im Allgemeinen *nicht* gilt:
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.