Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

11. Übung zur Vorlesung

# Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

**Abgabe: Fr., 2. Juli 2021, 12:00 Uhr**

**1. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Sei weiter $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $H_f(x)$ die Hesse-Matrix von $f$ in $x$.
Zeigen Sie:

$$D_v D_v f(x) = \langle H_f(x)v, v\rangle.$$

**2. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.
Zeigen Sie:

a) $f$ ist genau dann konvex, wenn die Hesse-Matrix von $f$ überall positiv semi-definit ist.

b) $f$ ist genau dann konvex, wenn

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Funktion $g(\omega) = f(y + \omega(x - y))$.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extrema und Sattelpunkte:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

**4. Aufgabe** (4 Punkte)
Finden Sie alle lokalen und globalen Minima und Maxima sowie Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^x x \sin(y).$$

## Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.