Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Maren-Wanda Wolf

12. Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2020/analysisII.php

Abgabe: Fr., 9. Juli 2021, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Funktion auf Extrema:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 35x - 47y + \frac{1}{32}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\cos(x+y). \end{aligned}$$

Hinweis: Wenn Nullstellen des Gradienten nicht explizit berechnet werden können, nutzen Sie Ihr Wissen über konvexe Funktionen.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Beweisen Sie den **Banachschen Fixpunktsatz** für vollständige metrische Räume:
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $F : X \to X$ eine Kontraktion. Dann besitzt F einen eindeutigen Fixpunkt.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Banachsche Fixpunktsatz ohne die Kontraktionseigenschaft im Allgemeinen nicht gilt. **Zusatz:** Überlegen Sie sich, warum es kein Gegenbeispiel mit einer Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ ohne Fixpunkt gibt.

4. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F und, wo sie existiert, ihre Inverse. Zeigen Sie, dass F surjektiv ist und dass jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.

Allgemeine Hinweise

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel.