Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Prof. Dr. Christof Schütte, Lasse Hinrichsen

1. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

WS 2020/2021

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php`

Abgabe: Do., 7. Mai 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (6 TP)
Seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Stützstellen. Wir wollen mit Mitteln der linearen Algebra zeigen, dass die Interpolationsaufgabe eine eindeutige Löesung besitzt. Zeigen Sie dazu, dass die Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ & & \vdots & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

die Determinante

$$\prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

hat, und schließen Sie daraus, dass die Matrix regulär ist.
Tipp: Vollständige Induktion.

2. Aufgabe (6 TP)
Wir wollen die Bemerkung aus dem Anfang des Skripts über die Transformation der Polynominterpolation näher untersuchen. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $b > a$. Betrachten Sie die Funktion

$$\xi(x) = \frac{2x - (a + b)}{b - a}.$$

Seien $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ paarweise verschiedene Stützstellen und sei $\overline{x}_k = \xi(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

a) Zeigen Sie, dass ξ bijektiv ist und dass ξ die Menge $[a, b]$ auf $[-1, 1]$ abbildet.

b) Folgern Sie, dass die transformierten Stützstellen $\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_n$ paarweise verschieden sind.

c) Sei ξ^{-1} die Umkehrabbildung von ξ. Zeigen Sie, dass für ein Polynom f_n vom Grad n gilt, dass $f_n \circ \xi^{-1}$ ebenfalls ein Polynom vom Grad n ist.

d) Sei f stetig. Sei $\overline{p}_n \in P_n$ die Lösung des folgenden Interpolationsproblems auf dem Intervall $[-1,1]$:

$$\overline{p}_n(\overline{x}_k) = (f \circ \xi^{-1})(\overline{x}_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Finden Sie ein $p_n \in P_n$, so dass gilt

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

3. Aufgabe (8 PP)

a) Programmieren Sie eine PYTHON-Funktion

```
lagrange(x, nodes, k)
```

die den Wert des k-ten Lagrangepolynoms bezüglich einer Liste von Stützstellen `nodes` an der Stelle `x` zurückgibt.

b) Programmieren Sie mit Hilfe der obigen Funktion eine weitere PYTHON-Funktion

```
lagrange_interpolation(x, nodes, function_values)
```

die den Wert des (Lagrange-)Interpolationspolynoms an der Stelle `x` bestimmt. Genauer: Sei f die zu interpolierende Funktion. Wir wollen $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$ auswerten.

- `x`: Stelle, an der p_n (bzw. `lagrange_interpolation`) ausgewertet werden soll.
- `nodes`: Eine Liste von paarweise verschiedenen Stützstellen x_k.
- `function_values`: Eine Liste die den Funktionswerten an den Stützstellen entspricht, d. h. `function_values[i]==`f`(nodes[k])`.

c) Plotten Sie die Interpolationspolynome für $f = \sin$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ für $n \in 1, 2, 3, 4$ in einem Plot, der auch die zu interpolierende Funktion enthält. Nutzen Sie dazu jeweils die äquidistanten Stützstellen $x_k = \frac{k}{n}\pi$, $k = 0, \ldots, n$.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.