Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Prof. Dr. Christof Schütte, Lasse Hinrichsen

2. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

WS 2020/2021

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php`

Abgabe: Do., 13. Mai 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (2 TP)
Es seien p, q zwei Polynome von der Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ und } q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \,.$$

Es gelte überall $p(x) = q(x)$, wobei $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ seien. Zeigen Sie, dass dann $n = m$ ist und dass für sämtliche Koeffizienten $a_k = b_k$ gilt.

2. Aufgabe (6 TP)
Es seien die Funktion $f(x) = \sin(x)$ sowie die Stützstellen $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ und $x_3 = \pi$ gegeben.

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p in der Newtonschen Darstellung. Verwenden Sie dazu das Neville-Schema.

b) Werten Sie p an der Stelle $x = \frac{3\pi}{2}$ mittels Horner-Schema aus.

c) Stellen Sie p in der Monomdarstellung dar.

d) Fügen Sie die Stützstelle $x_4 = 0$ hinzu und berechnen Sie die dividierte Differenz $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$.

3. Aufgabe (8 PP)

a) Schreiben Sie ein Python-Programm zur Extrapolation der Werte des Differenzenquotienten
$$D(h) = \frac{f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x})}{h}, \quad 0 < h \leq H,$$
an der Stelle $h = 0$. Werten Sie dazu das durch die Stützstellen $h_0 > h_1 > \ldots > h_n > 0$ gegebene Interpolationspolynom p_n in $h = 0$ mit dem Algorithmus von *Aitken–Neville* aus.

Strukturieren Sie Ihr Programm so, dass das Hinzufügen einer weiteren Stützstelle nur $\mathcal{O}(n)$ Operationen benötigt (Sie sollten also nicht das gesamte Schema erneut auswerten müssen).

b) Stellen Sie für $\tilde{x} = 0$, $H = \pi/2$ und die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + \sin(x), \\ f_2(x) &= \sqrt{x^3}, \\ f_3(x) &= \frac{1}{\gamma} \arctan(\gamma x), \quad \gamma = 10^4, \end{aligned}$$

jeweils den Fehler ohne Extrapolation, also $|f_i'(\tilde{x}) - D(h_n)|$, und mit Extrapolation, also $|f_i'(\tilde{x}) - p_n(0)|$, in Abhängigkeit von $n = 1, \ldots, 40$ graphisch dar (Tipp: `semilogy`). Für alle drei Fälle sollten Sie als Stützstellen einmal $h_k = 2^{-k}H$, $k = 0, \ldots, n$ und das andere Mal $h_k = H/(k+1)$, $k = 0, \ldots, n$ verwenden. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.