Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Prof. Dr. Christof Schütte, Lasse Hinrichsen

3. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php

Abgabe: Do., 20. Mai 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (6 TP)
Sei $f \in C^\infty([a,b])$ derartig, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\|f^{(k)}\|_\infty \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Liste paarweise verschiedener Stützstellen $(x_{ni})_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ gegeben. Bezeichne mit $p_n \in \mathcal{P}_n$ das Interpolationspolynom, das $p_n(x_{ni}) = f(x_{ni})$ für $i \in \{0,\ldots,n\}$ erfüllt. Beweisen Sie

$$\|f - p_n\|_\infty \in \mathcal{O}\left(e^{-n}\right) \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die für alle $k \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung $k! \geq \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$ verwenden.

2. Aufgabe (6 TP + 2 Bonus TP)
Für eine Funktion $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiere

$$\mathcal{M}(\sigma) = \operatorname{span}\left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \sigma(wx), w \in \mathbb{R}\right\}.$$

Sei $\sigma_n \in P_n$ (die *"Aktivierungsfunktion"*) ein Polynom vom Grad n mit

$$\sigma_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

wobei $a_i \neq 0$ für alle $i = 0,\ldots,n$ gelte.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(\sigma_n) = P_n$ gilt.

Hinweis: Wählen Sie $n+1$ paarweise verschiedene Parameter w_i und zeigen Sie, dass die Funktionen $\sigma_n(w_i\,\cdot)$ linear unabhängig sind.

Bonus: Für neuronale Netzwerke möchte man in der Regel Aktivierungsfunktionen wählen, die *keine* Polynome sind. Geben Sie einen Grund dafür an.

3. Aufgabe (8 PP)
Im Folgenden möchten wir das Fehlerverhalten von Interpolationspolynomen auf dem Intervall $[a, b] = [-5, 5]$ für $n \to \infty$ numerisch untersuchen. Für $f \in C([a, b])$ approximieren wir hierfür die Maximumsnorm $\|f\|_\infty$ durch die *diskrete Maximumsnorm* (mit 1001 gleichverteilten Stützstellen)

$$\|f\|_h := \max_{i \in \{0,\dots,1000\}} \left| f\left(a + \frac{i(b-a)}{1000}\right) \right|.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ werden wir die *äquidistanten Stützstellen*

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \text{ für } i \in \{0, \dots, n\}$$

verwenden.

Erstellen Sie für die folgenden Funktionen Plots, die jeweils das Verhalten $\|f_i - \phi_n(f_i)\|_h$ für $n \to \infty$ illustrieren und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen. Hier bezeichnet $\phi_n(f_i) \in P_n$ jeweils das Polynom, für das $p_n^i(x_k) = f_i(x_k)$ für $k = 0, \dots, n$ gilt.
Gehen Sie insbesondere auf Kondition, Stabilität, bekannte Fehlerabschätzungen und Konvergenzgeschwindigkeit ein.

a) $f_1(x) = e^x$.

b) $f_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

c) $f_3(x) = \text{sign}(x) \cdot x^2$

d) $f_4(x) = \text{sign}(x) \cdot x^3$.

Hinweise:

- Natürlich können Sie am Computer nicht „$n \to \infty$" betrachten. Für die obigen Beispiele ist im Groben das Intervall $n \in \{1, \dots, 100\}$ angemessen. Sie können aber natürlich auch ein anderes Intervall wählen, wenn sich dieses – beispielsweise durch Ihre Implementation bedingt – für Ihre Beobachtungen besser eignet.
- Sie dürfen Sich aussuchen, wie Sie die Interpolation genau durchführen. Es bietet sich die Interpolation mit Newton-Darstellung an; sie können aber auch die Lagrange-Interpolation von Blatt 1 verwenden. Sie bekommen bis zu 2 Bonuspunkte, wenn Sie in Ihren Betrachtungen beide Interpolationsarten verwenden und ggf. auf Unterschiede eingehen und diese begründen.
- Bevor Sie mit dem Aufschreiben beginnen, sollten Sie Ihre Implementation sicherheitshalber auf Plausibilität prüfen, beispielsweise indem Sie auch Funktionenplots von f und p_n für kleine n anfertigen.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.