Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Prof. Dr. Christof Schütte, Lasse Hinrichsen

4. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php

Abgabe: Do., 27. Mai 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Integrationsoperators

$$I : C[a,b] \ni f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

bezüglich der Maximumsnorm auf $C[a,b]$. Kann die relative Kondition beliebig schlecht werden?

b) Wie verhalten sich die absolute und relative Kondition der Integration von

$$f(x) = \sin((2n+1)x)$$

auf dem Intervall $[0,\pi]$ für $n \to \infty$?

2. Aufgabe (4 TP)

a) Zeigen Sie, dass die Newton-Côtes-Formeln für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ symmetrisch sind, d. h. es gilt jeweils

$$\lambda_k = \lambda_{n-k} \quad \forall k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

b) Zeigen Sie, dass die Gewichte λ_k der Newton-Côtes-Formeln die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

erfüllen.

3. Aufgabe (4 TP)
Die n-te Newton-Côtes-Quadraturformel ist so konstruiert, dass sie für Polynome $p \in P_n$ exakt ist. Zeigen Sie, dass für gerades n sogar Polynome vom Grade $n+1$ exakt integriert werden.

4. Aufgabe (8 PP)
Wir wollen versuchen, das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

numerisch zu approximieren. Dazu unterteilen wir das Intervall $[0,1]$ äquidistant in n Teilintervalle mit den Grenzen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ und berechnen die sogenannte *Riemann-Summe*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Schreiben Sie ein PYTHON-Programm `riemann(I,f,n,q)`, das diese Riemann-Summe berechnet. Dabei bezeichnet der Vektor `I` das Integrationsintervall, `f` die Funktion, `n` die Anzahl der Teilintervalle und $0 \leq \mathtt{q} \leq 1$ einen Wert, der durch $\xi_k = x_{k-1} + \mathtt{q}(x_k - x_{k-1})$ die Lage des Wertes ξ_k festlegt.
Berechnen Sie nun für $n = 1, \ldots, 500$ den Fehler der Riemann-Summe, und plotten Sie diesen Fehler in einer logarithmischen Skala gegen n. Werten Sie dazu einmal die Funktion an den Anfangspunkten der Teilintervalle aus (d.h. $\mathtt{q} = 0$), ein anderes Mal an deren Mittelpunkten (d.h. $\mathtt{q} = 0.5$). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Was beobachten Sie?
Tipp: Für die Berechnung des Fehlers können Sie den Vergleichswert
`0.5*scipy.special.erf(1)*math.sqrt(math.pi)` heranziehen.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.