

6. Übung zur Vorlesung

COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK II

WS 2020/2021

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php

Abgabe: Do., 10. Juni 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (6 TP)

In dem Artikel “A Mathematical Model for the Determination of Total Area Under Glucose Tolerance and Other Metabolic Curves” von Mary M. Tai (<https://math.berkeley.edu/~ehallman/math1B/TaisMethod.pdf>) wird das sogenannte Modell von Tai zur Bestimmung der Fläche unter einer Kurve entwickelt. Beschreiben Sie das mathematische Modell und diskutieren Sie den Artikel vor dem Hintergrund der Inhalte aus der Vorlesung. Geben Sie eine Fehlerabschätzung für das vorgestellte Verfahren an.

2. Aufgabe (4 TP)

a) Zeigen Sie, dass $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}y'(t) &= F(t, y(t)), \quad \text{für } t > 0 \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

mit $F(t, x) = -2tx^2$ und $y_0 = 1$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $y(t) = e^{-2t} + 1$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}y'(t) &= F(t, y(t)), \quad \text{für } t > 0 \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

mit $F(t, x) = 2 - 2x$ und $y_0 = 2$ ist.

3. Aufgabe (2 TP + 4 PP)

Zu $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2x(t) + 2te^{2t}, \quad \text{für } 0 < t < T \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Lösung $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dieses Anfangswertproblems analytisch in Abhängigkeit des Startpunkts x_0 . Der finale Ausdruck sollte hierbei kein Integral mehr beinhalten.

b) Sei $T = 10$, $x_0 = 1$ und $\tilde{x}_0 = 1.001$. Wir bezeichnen mit x die Lösung des AWP's mit $x(0) = x_0$ und mit \tilde{x} die Lösung des AWP's mit $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$.

Plotten Sie die Funktionen x und \tilde{x} in einer Abbildung über dem Intervall $[0, T]$. Plotten Sie ferner auch den Fehler $|x(t) - \tilde{x}(t)|$ in eine weitere Grafik. Was beobachten Sie und wie interpretieren Sie das Ergebnis?

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.