Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Prof. Dr. Christof Schütte, Lasse Hinrichsen

7. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

WS 2020/2021

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php`

Abgabe: Do., 17. Juni 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (6 TP)
Wir wollen ein Modell für das Wachstum einer Bakterienkultur entwickeln. Die Vermehrung der Bakterien soll dabei durch Teilung erfolgen. Bekannt sei die Anzahl x_0 der Bakterien zum Zeitpunkt $t = 0$ und gesucht sei

$$x(t): \qquad \text{Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt } t > 0.$$

a) Es sei $p\Delta t$, $p \in (0, 1)$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Bakterium während eines „kleinen" Zeitintervalles Δt teile. Stellen Sie auf Grundlage dieser Annahme eine Differentialgleichung für x' auf.

b) Das in Aufgabenteil a) entwickelte Modell soll verbessert werden. Wir nehmen nun zusätzlich an, daß Konkurrenz zweier Bakterien innerhalb des „kleinen" Zeitintervalles Δt zum Absterben von

$$\Delta x_{\text{kon}} = kx(t)^2 \, \Delta t\,, \qquad k > 0\,,$$

Bakterien führe. Die Konzentration der Bakterien sei dabei für alle Zeiten ortsunabhängig. Stellen Sie ein verbessertes Modell für das Bakterienwachstum auf, d.h. geben Sie eine Differentialgleichung für x' an, die sowohl Vermehrung als auch Konkurrenz berücksichtigt.

c) Geben Sie für die in a) bzw. b) aufgestellte Differentialgleichung jeweils die exakte Lösung an und untersuchen Sie jeweils das Verhalten von $x(t)$ für $t \to \infty$. Welche Bedeutung hat der Modellparamter k?

Hinweis: Eine Möglichkeit die ODE in b) zu lösen wäre zum Beispiel das Kommando *dsolve* in Maple. Aber auch eine Literaturrecherche oder fleissiges Rechnen können eine Lösung liefern.

2. Aufgabe (6 TP)
Zur Differentialgleichung

$$x'(t) = \lambda x(t)\,, \qquad 0 < t \leq T$$

für $\lambda > 0$ seien x_k und $\tilde{x}_k$ die mit dem impliziten Euler-Verfahren gewonnenen Näherungslösungen zu den Anfangswerten x_0 bzw. $\tilde{x}_0$. Zeigen Sie, daß unter der Schrittweitenbeschränkung $\tau < \frac{1}{\lambda}$ die folgende Abschätzung für die diskrete Kondition des impliziten Euler-Verfahrens gilt:

$$|x_k - \tilde{x}_k| \leq e^{\frac{T\lambda}{1-\tau\lambda}} |x_0 - \tilde{x}_0|.$$

3. Aufgabe (8 PP)
Wir möchten Anfangswertprobleme der Form

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{AWP}$$

in Python numerisch lösen.

a) Implementieren Sie eine Funktion `explicitEuler(A, f, x0, T, n)`, die das Problem (AWP) mit $\lambda =$ `A` näherungsweise mittels des expliziten Euler-Verfahrens aus der Vorlesung löst und den Vektor aller Iterierten als `x` $\in \mathbb{R}^{n+1}$ (inklusive Startwert) zurückgibt. Hierbei sei die Zeit-Schrittweite durch $\tau := \frac{T}{n}$ definiert.

b) Implementieren Sie analog eine Funktion `implicitEuler(A, f, x0, T, n)`, die (AWP) mit dem impliziten Euler-Verfahren aus der Vorlesung löst und als Ergebnis die Iterierten `x` $\in \mathbb{R}^{n+1}$ zurückgibt.

c) Wir betrachten nun die konkrete Wahl $\lambda = 16$, $f(t) = t$, $T = 8$ und $x_0 = 1$. Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) jeweils mit dem expliziten und mit dem impliziten Euler-Verfahren für $n = 60$ und für $n = 120$. Plotten Sie Ihre Lösungen jeweils mit einer geeigneten Skalierung; die Skalierung muss dabei *nicht* für alle Plots übereinstimmen! Was beobachten Sie und wie erklären Sie sich dieses Verhalten?

   Hinweis: Zum Vergleich dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die analytische Lösung des Problems durch $x(t) = \frac{257}{256}e^{16t} - \frac{t}{16} - \frac{1}{256}$ gegeben ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass `lambda` in Python ein reserviertes Schlüsselwort ist. Den Funktionsparametern wurde daher der Name `A` statt `lambda` gegeben!

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.