Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Prof. Dr. Christof Schütte, Lasse Hinrichsen

8. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2021

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php`

Abgabe: Do., 24. Juni 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ oder gelte $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit einer Schrittweite $\tau \leq \tau_0$, wobei $\tau_0 < \frac{1}{\lambda}$. Zeigen Sie: Das implizite Euler-Verfahren (3.37) aus dem Skript ist konsistent mit Ordnung $p = 1$.

2. Aufgabe (8 TP + 4 PP)
In dieser Aufgabe soll ein Verfahren mit Konsistenzordung 2 eingehend untersucht werden.

a) Es sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt. Geben Sie die Taylorentwicklung von $x(t + \tau)$ und $x(t + 2\tau)$ um $t \in \mathbb{R}$ mit Restglied dritter Ordnung an. Bestimmen Sie Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$x'(t) = \frac{1}{\tau}\left(Ax(t) + Bx(t+\tau) + Cx(t+2\tau)\right) + \mathcal{O}(\tau^2)$$

gilt.

b) Diese Gleichung legt nahe, $x'(t_k)$ unter Vernachlässigung des Terms $\mathcal{O}(\tau^2)$ durch die rechte Seite zu approximieren. Dies ergibt eine Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = \mu x(t), \qquad x(0) = x_0, \qquad t \in [0, T]$$

auf dem Gitter $t_k = \tau k$. Da zur Berechnung von x_{k+1} die Werte x_k und x_{k-1} benötigt werden, soll x_1 durch einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens bestimmt werden. Geben Sie eine Rekursionsformel zur Auswertung von x_{k+1} an, und zeigen Sie, dass das Verfahren die Konsistenzordung 2 besitzt.

c) Implementieren Sie das Verfahren als `taylor2(mu,x0,T, tau)`, und testen Sie es für $\mu = -1, -2, -3$, $x_0 = 1$ und $T = 1$ mit verschiedenen Schrittweiten τ. Was beobachten Sie? Ist das Verfahren konvergent? Interpretieren Sie die Ergebnisse.

d) Interpretieren Sie für $\mu < 0$ das Verfahren als Dreitermrekursion der Form

$$x_{k+1} + ax_k + bx_{k-1} = 0$$

und geben Sie eine geschlossene Darstellung der diskreten Lösung an, indem Sie die Darstellung

$$x_k = \alpha(x_0, x_1)\lambda_1^k + \beta(x_0, x_1)\lambda_2^k \tag{1}$$

verwenden. Hier bezeichnen λ_1, λ_2 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, wobei $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ gelte, und darüber hinaus gelte

$$\alpha(x_0, x_1) = \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(\lambda_2 - 1 - \tau\mu)x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$\beta(x_0, x_1) = \frac{x_1 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(1 + \tau\mu - \lambda_1)x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Zeigen Sie, dass das Verfahren für jede Wahl von τ nicht stabil ist. Beweisen Sie dazu, dass für jede Schrittweite die diskrete Kondition nicht beschränkt ist, indem Sie

$$|x_k - \tilde{x}_k| \geq c(k)|x_0 - \tilde{x}_0|$$

mit einer Folge $c(k) \to \infty$ zeigen.
Hinweis: Fassen Sie (1) als Funktion in x_0 auf und berechnen Sie entsprechend die Kondition. Verwenden Sie anschließend die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.