

9. Übung zur Vorlesung
COMPUTERORIENTIERTE MATHEMATIK II
SoSe 2021
http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2021/CoMaII.php

Abgabe: Do., 01. Juli 2021, 12:15 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)

Zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in (0, T], \quad x(0) = x_0.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A .
- Bestimmen Sie eine Lösung dieses Anfangswertproblems. Geben Sie Ihre Lösung ohne Verwendung der Matrix-wertigen Exponentialfunktion an.
- Berechnen Sie die absolute Kondition des Anfangswertproblems.

2. Aufgabe (4 TP)

Zu einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t).$$

- Seien $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lösungen der obigen Differentialgleichung. Zeigen Sie für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, dass auch $z = ax + by$ eine Lösung ist.
- Beweisen Sie für beliebiges $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix},$$

dass

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin(ct) \\ \cos(ct) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} -\cos(ct) \\ \sin(ct) \end{pmatrix}$$

Lösungen der Differentialgleichung sind.

- c) Sei A wie in Teilaufgabe b) sowie $y_0 \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie eine Funktion y , die die obige Differentialgleichung löst und $y(0) = y_0$ erfüllt.

3. Aufgabe (4 TP)

Für $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = Ax(t) \quad t \in (0, T], \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,m}$. Beweisen Sie für zwei Lösungen x, \tilde{x} von (1) zu Anfangswerten $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ und den größten Eigenwert λ_1 von A die Abschätzung

$$\max_{t \in [0, T]} |x(t) - \tilde{x}(t)|_2 \leq \max_{t \in [0, T]} e^{\lambda_1 t} |x_0 - \tilde{x}_0|_2.$$

ALLGEMEINE HINWEISE

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.