Übungsblatt 2 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 7. November 2011, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 *Ebenen im* $\mathbb{R}^3$

Für diese Aufgabe definieren wir den Begriff Ebene *neu.*

Definition 1 *Eine Teilmenge* $E \subset \mathbb{R}^3$ *heißt* Ebene*, wenn es* $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ *mit* $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ *gibt, so dass*

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\right\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass eine Teilmenge E *des* $\mathbb{R}^3$ *genau dann eine Ebene ist, wenn es Vektoren* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *gibt, so dass*

$$E = u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$$

und für v *und* w *gilt: Sind* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *mit* $\lambda v + \mu w = 0$*, so folgt notwendigerweise* $\lambda = \mu = 0$.

(b) Finden Sie für die Ebene

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1\right\}$$

eine Parametrisierung.

(c) Geben Sie für die in Parameterdarstellung gegebene Ebene

$$E = (1, 2, 3) + \mathbb{R} \cdot (4, 5, 6) + \mathbb{R} \cdot (7, 8, 9).$$

eine beschreibende lineare Gleichung an.

Aufgabe 2 *Ebenen im* $\mathbb{R}^n$

(a) Geben Sie eine passende Definition dafür an, dass zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = u_1 + \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot w_1, \qquad E_2 = u_2 + \mathbb{R} \cdot v_2 + \mathbb{R} \cdot w_2$$

parallel sind.

(b) *Zeigen Sie, dass es zu jeder Ebene $E = u + \mathbb{R} \cdot v + \mathbb{R} \cdot w$ und zu jedem Punkt u' im $\mathbb{R}^3$ genau eine parallele Ebene E' zu E durch u' gibt.*

Aufgabe 3 *Lineare Gleichungssysteme*

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 8 & 2a \\ 3 & -4 & b & 11 \\ 17 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Aufgabe 4 *Abbildungen*

Sind die folgenden Zuordnungsvorschriften Abbildungen auf dem jeweils angegeben Definitionsbereich? Beweisen Sie!

(a)

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{falls } x > 0 \\ 1 & \textit{falls } x < 0 \end{cases}$$

(b)

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{falls } x \geq 0 \\ 1 & \textit{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

(c)

$$f_3 : \{a, b, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad f(a) = c, f(b) = 1, f(5) = 5$$

(d)

$$f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \frac{x}{2}$$

(e)

$$f_5 : \mathbb{R} \to \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{falls } x \textit{ gerade} \\ 1 & \textit{falls } x \textit{ ungerade} \end{cases}$$

(f)

$$f_6 : \{a, b, c\} \to \{b, c, a\}, \quad x \mapsto b$$

(g)

$$f_7 : \Big\{ \{a, b\}, \{\emptyset\}, 3 \Big\} \to \{b, c, a\}, \quad f(\{a, b\}) = a, f(\{\emptyset\}) = c, f(3) = c$$

(h)

$$f_8 : \Big\{ \{a, b\}, \{\emptyset\}, \{3\} \Big\} \to \Big\{ \{a, b\}, \{\emptyset\}, \{3\} \Big\}, \quad x \mapsto x \cup \emptyset$$