Übungsblatt 3 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 14. November 2011, 8:30 Uhr. Bis Freitag 11. November 2011 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *Lineare Gleichungssysteme*

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & - & 2y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungssystem für alle ganzen Zahlen d, die von 2 verschieden sind nicht lösbar ist.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & d \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2 *[2 Punkte je Richtung] Abbildungen und Mengen*

Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : M \to N$ folgende Bedingungen gleichwertig sind:

(i) f ist injektiv,

(ii) für je zwei Teilmengen $M_1, M_2 \subset M$ gilt

$$f(M_1) \cap f(M_2) = f(M_1 \cap M_2).$$

Aufgabe 3 *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) [1 Punkt] $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y,$

(b) [1 Punkt] $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1,$

(c) [1 Punkt] $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 1,$

(d) [1 Punkt] $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y))$.

Aufgabe 4 *Abbildungen*

Seien $f : X \to Y$ *und* $g : Y \to Z$ *Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:*

(a) [2 Punkte] Sind f, g *beide injektiv (surjektiv), so auch* $g \circ f$.

(b) [1 Punkt] Ist $g \circ f$ *injektiv, so auch* f.

(c) [1 Punkt] Ist $g \circ f$ *surjektiv, so auch* g.