

# Übungsblatt 4 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends

Assistent: Patrik Marschalik

Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS\\_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php)

**Abgabe bis spätestens 21. November 2011, 8:30 Uhr. Bis Freitag 18. November 2011 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.**

## Aufgabe 1 [4 Punkte] Abbildungen und Mengen

Es seien  $M$  und  $N$  endliche Mengen. Zeigen Sie, dass die Menge  $\text{Abb}(M, N)$  endlich ist, und bestimmen Sie die Anzahl ihrer Elemente.

## Aufgabe 2 Äquivalenzrelationen

Für  $(x, y)$  und  $(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definieren wir

$$(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

(i) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist.

(ii) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Restklassen von  $\sim$  und stellen Sie sie graphisch dar.

## Aufgabe 3 Gruppen und Äquivalenzrelationen

Seien  $\mathbb{N}$  die natürlichen Zahlen.

(i) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass auf der Menge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  durch

$$(n, m) \sim (n', m') :\Leftrightarrow n + m' = n' + m$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist. Sei  $\mathbb{Z}$  die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu  $(n, m)$  gehörige Äquivalenzklasse sei mit  $n - m$  bezeichnet. Somit ist

$$n - m = n' - m' \Leftrightarrow n + m' = n' + m.$$

(ii) [1 Punkte] Zeigen Sie, dass in  $\mathbb{Z}$  die Verknüpfungen

$$(n - m) + (n' - m') := (n + n') - (m + m').$$

wohldefiniert sind.

(iii) [1 Punkte] Zeigen Sie schließlich, dass  $\mathbb{Z}$  mit diesen Verknüpfungen zu einer Gruppe wird. Sie heißt die Gruppe der ganzen Zahlen.

#### **Aufgabe 4** Gruppen

Sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$ . Wir bezeichnen mit  $\langle g \rangle$  die Teilmenge  $\langle g \rangle := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  von  $G$ .

(i) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass  $\langle g \rangle$  eine Untergruppe von  $G$  ist.

(ii) [2 Punkte] Existiert in einer Gruppe  $G$  ein Element  $g$  mit  $\langle g \rangle = G$ , so heißt die Gruppe zyklische Gruppe. Bestimmen Sie alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe. (Hinweis: Es darf benutzt werden, dass die Menge der natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung wohlgeordnet ist. Das heißt jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element. Wo wird das verwendet?)