Übungsblatt 5 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 28. November 2011, 8:30 Uhr. Bis Freitag 25. November 2011 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *Gruppen*

(i) *[2 Punkte] Zeigen Sie, dass die beiden im Buch Lineare Algebra von Gerd Fischer angegebenen Gruppen mit vier Elementen gerade die Gruppen* $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ *und* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ *sind, wobei die Addition auf* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *komponentenweise zu verstehen ist.*

(ii) *[2 Punkte] Sind die Gruppen* $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ *und* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ *isomorph? Also, gibt es einen Gruppenisomorphismus? Beweisen Sie!*

Aufgabe 2 *[4 Punkte] Gruppen*

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ *ist* $(\mathbb{R}, \circ)$ *eine Gruppe, wenn* $\circ$ *durch*

$$x \circ y = a \cdot x + b \cdot y, \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

definiert ist?

Aufgabe 3 *[4 Punkte] Gruppen*

Sei $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $U \subseteq G$ *und* $U \neq \emptyset$*. Zeige Sie, dass* U *genau dann Untergruppe von* $(G, \cdot)$ *ist, falls* $ab^{-1} \in U$ *für alle* $a, b \in U$ *gilt.*

Aufgabe 4 *Gruppen*

Es seien U_1 *und* U_2 *Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$
Zeigen Sie:

1. *[2 Punkte]* $U_1 \cap U_2$ *ist Untergruppe von* $(G, \cdot)$,
2. *[2 Punkte] Ist* $U_1 \not\subseteq U_2$ *und* $U_2 \not\subseteq U_1$*, so ist* $U_1 \cup U_2$ *keine Untergruppe von* $(G, \cdot)$.